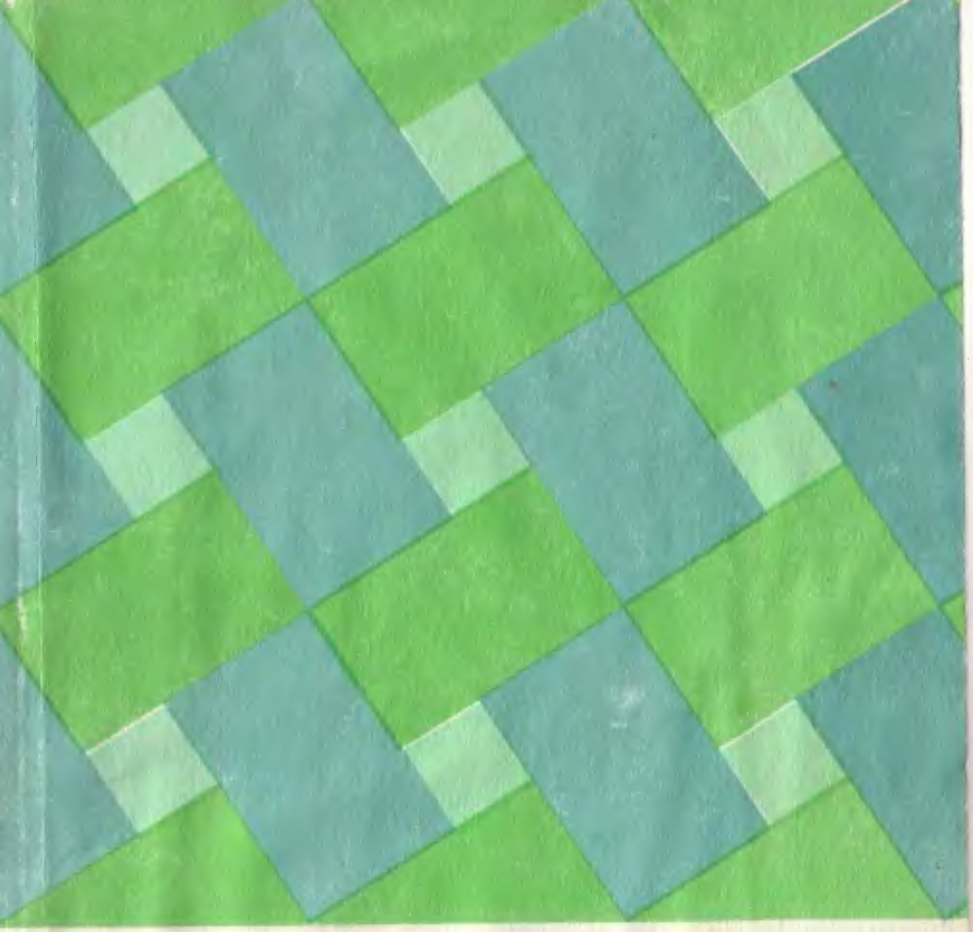

В. И. Арнольд

ГЮЙГЕНС и БАРРОУ, НЬЮТОН и ГУК

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ СТУДЕНТОВ

В. И. АРНОЛЬД

ГЮЙГЕНС И БАРРОУ, НЬЮТОН И ГУК

ПЕРВЫЕ ШАГИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ КАТАСТРОФ, ОТ ЭВОЛЬВЕНТ ДО КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1 г
А8 4
УДК 517 (091)

Серия издается с 1989 года

Серия выпускается под общим руководством Правления Московского Математического Общества. Главный редактор серии – Президент Московского Математического Общества академик *С. П. Новиков.*

А р н о л ь д В. И. **Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов** / Серия «Современная математика для студентов» — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.— 1989.— 96 с.— ISBN 5-02-013935-1.

Настоящая брошюра открывает серию «Современная математика для студентов», в основу которой положены лекции цикла «Студенческие чтения» Московского Математического Общества.

В книге, написанной на основе лекции для студентов, посвященной трехсотлетию «Математических начал натуральной философии» Ньютона, рассказывается о рождении современной математики и теоретической физики в трудах великих ученых XVII века. Некоторые идеи Гюйгенса и Ньютона опередили свое время на несколько столетий и получили развитие только в последние годы. Об этих идеях, включая несколько новых результатов, также рассказано в книге.

Для студентов и преподавателей вузов, учителей математики средней школы и историков науки.

Ил. 41.

А $\frac{1602070000-030}{053\ (02)-89}$ 56-89

© Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1989

ISBN 5-02-013935-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук 5

Глава 1. **Закон всемирного тяготения** 7

§ 1. Ньютон и Гук 7
§ 2. Задача о падении тел 11
§ 3. Закон обратных квадратов 16
§ 4. Principia 18
§ 5. Притяжение сфер 20
§ 6. Доказал ли Ньютон эллиптичность орбит? 23

Глава 2. **Математический анализ** 25

§ 7. Анализ как теория степенных рядов 25
§ 8. Многоугольники Ньютона 26
§ 9. Барроу 28
§ 10. Ряды Тейлора 32
§ 11. Лейбниц. 33
§ 12. Дискуссия об изобретении анализа 37

Глава 3. **От эвольвент до квазикристаллов** 39

§ 13. Эвольвенты Гюйгенса 39
§ 14. Волновые фронты Гюйгенса 42
§ 15. Эвольвенты и икосаэдр 43
§ 16. Икосаэдр и квазикристаллы 47

Глава 4. **Небесная механика** 52

§ 17. Ньютон после Principia 52
§ 18. Натуральная философия Ньютона 53
§ 19. Триумфы небесной механики 54
§ 20. Теорема Лапласа об устойчивости 55
§ 21. Падает ли Луна на Землю? 56
§ 22. Задача трех тел 57
§ 23. Закон Тициуса — Боде и малые планеты 59
§ 24. Люки и резонансы 60

Глава 5. **Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов** 65

§ 25. Теорема Ньютона о трансцендентности интегралов 65
§ 26. Глобальная и локальная алгебраичность 67

§ 27. Теорема Ньютона о локальной неалгебраичности . . 69
§ 28. Аналитичность гладких алгебраических кривых 70
§ 29. Алгебраичность локально алгебраически квадрируемых овалов 71
§ 30. Алгебраически неквадрируемые кривые с особенностями 72
§ 31. Доказательство Ньютона и современная математика 74
Добавление 1. Доказательство эллиптичности орбит . . 75
Добавление 2. Лемма XXVIII из Principia Ньютона . . 79
Примечания 84

ГЮЙГЕНС И БАРРОУ, НЬЮТОН И ГУК

В 1987 году исполнилось 300 лет «Математическим началам натуральной философии» Ньютона — книге, заложившей основы всей современной теоретической физики. С этой книги, собственно говоря, и начинается теоретическая физика. Почти тогда же и там же начался математический анализ. Первая публикация по анализу относится к 1684 году, и принадлежит она не Ньютону, так и не опубликовавшему своих открытий в этой области, а Лейбницу.

Говоря *) о содержании «Математических начал натуральной философии», стоит посмотреть, как была написана эта книга, из чего она возникла, какие задачи решались, когда создавался анализ, для чего он создавался, почему он так называется, откуда взялись его основные понятия, например, почему в анализе мы говорим о функциях и т. д.

Все эти вопросы относятся к ньютоновской эпохе конца XVII века, когда работала целая плеяда блестящих математиков. Последующее развитие математики совершенно затмило их достижения, поэтому грандиозные открытия тех времен сейчас издалека кажутся нам меньшими, чем они были на самом деле. Среди этих математиков, кроме всем известных Декарта, Паскаля и Ферма, предшествовавших Ньютону и Лейбницу, и работавшего немного позже Иоганна Бернулли, необходимо назвать Барроу, непосредственного предшественника и учителя Ньютона, и Гюйгенса, который решал те же самые задачи,

*) Настоящая книжка представляет собой расширенный вариант доклада, прочитанного 25 февраля 1986 года при открытии студенческого лектория Московского математического общества. Автор благодарен А. Ю. Вайнтробу, предоставившему свою запись этого доклада, а также В. Л. Гинзбургу и А. П. Юшкевичу за полезные замечания. Доклад дополнен материалами статей «Триста лет математического естествознания» (Природа, 1987, № 8, с. 5—15) и «Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов» (Квант, 1987, № 12, с. 17—21).

что и Ньютон с Лейбницем, но обычно несколько опережая их и безо всякого анализа.

Математические открытия Гюйгенса постигла странная судьба. Большинство из них вошло в анализ не при его жизни, а значительно позднее, и в основном благодаря трудам других математиков (например, Гамильтона, работавшего более чем 100 лет спустя). Теперь эти результаты входят в науку под видом симплектической геометрии, вариационного исчисления, оптимального управления, теории особенностей, теории катастроф, . . . Про некоторые из них мы узнаем только сейчас. Например, недавно выяснилось (доклад Беннекена (1) *) на семинаре Бурбаки), что в первом учебнике анализа, написанном Лопиталем по лекциям Иоганна Бернулли, содержится изображение многообразия нерегулярных орбит группы Кокстера H_3 (порожденной отражениями в плоскостях симметрии икосаэдра). Это изображение появляется там не в связи с группой симметрий икосаэдра, а в качестве результата исследований эвольвент плоских кривых с точкой перегиба, исследований очень близких к Гюйгенсу (и, возможно, даже им проделанных, хотя первая публикация, по-видимому, принадлежит Лопиталю). Картинки, появившиеся в недавних работах о связи икосаэдра с особенностями эволют и эвольвент, и, надо сказать, полученные современными математиками не без труда и даже с помощью ЭВМ, как оказалось, были известны уже в те времена.

К эвольвентам мы еще вернемся, а пока я расскажу об истории книги Ньютона «Математические начала натуральной философии» и о содержании основной части этой книги. По существу, эта книга была написана для решения одной-единственной задачи. И хотя в ней содержатся, разумеется, и так называемые три закона Ньютона и большое количество другого материала, но все это было написано практически менее чем за год только для того, чтобы изложить решение одной задачи, а именно задачи о движении в поле силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до притягивающего центра.

Первая часть рассказа — это история о том, откуда взялась эта задача, почему Ньютон стал ею заниматься и что он, собственно говоря, по этому поводу доказал. Это история о Ньютоне и Гуке.

---

*) Ссылки подобного вида отсылают к Примечаниям в конце книги.

Глава 1. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Ньютон и Гук

Имя Ньютона и его огромные заслуги и перед математикой, и перед физикой всем хорошо известны. Он родился в 1642 году, в год смерти Галилея, а умер в 1727 году. Работы Ньютона в области теории тяготения стали знамениты в континентальной Европе благодаря Вольтеру, который в последние годы жизни Ньютона посетил Англию и распропагандировал закон всемирного тяготения, произведший на него большое впечатление. Вольтер же поведал миру и о знаменитом яблоке, о котором ему рассказала племянница Ньютона Катерина Бартон (2).

Роберт Гук — старший современник Ньютона — известен гораздо меньше. Он родился в 1635 году, а умер в 1703 году. Гук был небогатым человеком и начал свою деятельность в качестве ассистента у Бойля (который теперь всем известен благодаря открытому Гуком закону Бойля — Мариотта (3)), т. е., попросту говоря, лаборантом. Впоследствии Гук стал работать в только что образованном Королевском обществе (т. е. английской академии наук) в должности куратора. Обязанности куратора Королевского общества были весьма нелегкими. Согласно контракту, он должен был на каждом заседании Общества (а они происходили еженедельно, кроме времени летних каникул) демонстрировать три или четыре опыта, доказывающих новые законы природы.

На посту куратора Гук находился в течение сорока лет и все это время тщательнейшим образом исполнял свои обязанности. Разумеется, в контракт не входило условие, что все демонстрируемые законы должны быть изобретены им самим. Ему разрешалось читать книги, переписываться с другими учеными, интересоваться их открытиями. Требовалось только проверять, справедливы ли их утверждения, и убеждать членов Королевского

общества в том, что такой-то закон надежно установлен. Для этого необходимо было этот закон экспериментально доказать, продемонстрировав соответствующий опыт. В этом и состояла служебная деятельность Гука.

Гук по обязанности интересовался всеми естественнонаучными открытиями других, но и самому ему тоже приходилось делать открытия. К концу жизни он насчитывал 500 открытых им законов. Надо сказать, что эти столь многочисленные открытия Гука составляют основу современной науки. Очень многие из них более или менее параллельно были открыты другими учеными, поэтому очень часто сейчас законы, открытые Гуком, известны, но приписываются другим людям. В итоге закон упругости (сила пропорциональна удлинению) носит имя Гука, а остальные его открытия носят другие имена. Гук, например, открыл клеточную структуру растений. Он усовершенствовал микроскоп и первым наблюдал, что растения состоят из клеток. Он разглядывал в микроскоп различные предметы и все, что видел, зарисовывал. Ясно, что, глядя в микроскоп на новые вещи, он немедленно делал новые открытия. Гук сам лично гравировал картинки, которые видел в микроскоп, и даже издал на основе этого книгу «Микрография», приведшую позднее Левенгука к его знаменитым биологическим открытиям.

В те времена легко было совершать фундаментальные открытия, и все их помногу и совершали. Гюйгенс, к примеру, усовершенствовал телескоп, посмотрел на Сатурн и открыл его кольцо, а Гук обнаружил Красное пятно на Юпитере. Тогда открытия не были необычными событиями, они не регистрировались, не патентовались, как сейчас, они были чем-то совершенно повседневным. (Так дело обстояло не только в области естествознания. Математические открытия в то время сыпались тоже как из рога изобилия (4).)

Но у Гука никогда не было достаточно времени, чтобы остановиться на каком-нибудь своем открытии и подробно его развить, так как на следующей неделе ему нужно было демонстрировать новые законы. Поэтому при всем многообразии достижений Гука его открытия выглядели несколько незавершенными, и иногда он в спешке делал утверждения, которые не мог аккуратно и строго математически обосновать.

Одним из открытий, на которые Гук претендовал, было открытие волновой природы света. (Что свет — это волны, примерно одновременно с Гуком утверждал

также и Гюйгенс.) Гук в своих выводах основывался на изучении цветов тонких пленок (мыльных пузырей, например). Он считал, что интерференция света в мыльных пленках доказывает его волновую природу. В связи с этим Гук впервые столкнулся с Ньютоном.

Ньютон тоже занимался проблемой света. Он разложил белый свет на радужные составляющие, определил цвета солнечного спектра и заложил тем самым основы современной спектроскопии — науки в значительной степени волновой. Тем не менее Ньютон придерживался другой теории и считал, что свет состоит из движущихся частиц. Звук — это волны, потому что звук может огибать препятствия (его можно слышать, даже если источник скрыт за холмом, так что холм, по существу, не является препятствием для звука), а свет препятствий не огибает, из-за холма его не увидишь—какие же это волны?

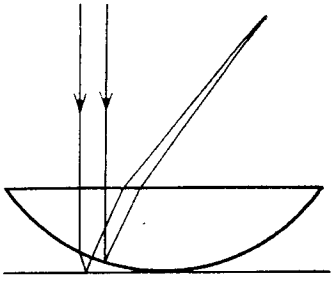

Рис. 1. Образование колец Ньютона

Надо сказать, правда, что, несмотря на утверждение, что свет — это частицы, Ньютон был первым, кто измерил длину световой волны. Сделал он это так. Если на стекло положить линзу и освещать сверху (рис. 1), то длины путей световых лучей, встречающихся в одной точке, будут различны и, в зависимости от того, целому или нецелому числу длин волн равна разность, лучи будут усиливать друг друга или гаситься. Поэтому, глядя на стекло сверху, можно увидеть кольца, состоящие из точек равной освещенности (эти кольца называются кольцами Ньютона, но открыл их Гук). Важно, что толщина воздушного клина между линзой и стеклом пропорциональна *квадрату* расстояния до точки касания. Благодаря этому радиусы колец оказываются пропорциональными корню квадратному из произведения длины волны на радиус кривизны линзы. Вследствие этого радиусы колец не так малы, как длина волны, и кольца можно наблюдать. Измерив эти кольца, можно найти длину волны света, что Ньютон и сделал. Но как же он вычислил длину волны, если в волновую природу света не верил? Дело в специфике ньютоновской теории света. Он считал, что световые частицы летят в пространстве не равномерно, а во время движения испытывают

периодические приступы (припадки — fits — нечто вроде современных представлений о внутренних степенях свободы частиц). Таким образом он измерял расстояние между положениями частицы при двух соседних приступах.

Итак, между Ньютоном и Гуком возникли разногласия. Может быть, их удалось бы обойти, если бы не отягчающее обстоятельство. Ньютон жил в Кембридже, а Гук — в Лондоне, и переписку они вели в основном через секретаря Королевского общества Ольденбурга. Характер у Ольденбурга был, судя по всему, не очень хороший, и большое удовольствие ему доставляло сталкивать людей между собой. В результате и вследствие различия взглядов на природу света отношения между Ньютоном и Гуком совершенно испортились. Но через некоторое время Ольденбург умер (мы еще к нему вернемся, когда будем говорить об анализе), и Гук написал Ньютону примирительное письмо. Вот с этого-то письма Гука от 24 ноября 1679 года и начинается, в сущности, история закона всемирного тяготения (5).

Смысл примирительного письма Гука Ньютону — предложение совместной работы. Гук признает замечательные достижения Ньютона и предлагает совместно обсуждать и экспериментально проверять всевозможные идеи и теории. Гук предлагает Ньютону, в частности, высказать свои соображения о нескольких своих гипотезах и обещает не обижаться на критику, с тем чтобы, забросив старые раздоры, совместно взяться за исследование природы. В этом же письме Гук сообщает Ньютону о последних физических и математических новостях. Одна из новостей — это поступившая из континентальной Европы очередная теория планетных движений. Согласно этой теории считалось, что в космосе постоянно бушуют вихри, увлекающие за собой планеты, поддерживающие их и заставляющие вследствие этого их вращаться вокруг Солнца. Другая теория — это гипотеза Гука о притяжении. В этом письме он не говорит о ней подробно, а только спрашивает, что думает Ньютон об этой гипотезе. Еще одна гипотеза Гука — это закон колебаний упругих тел. В этом же письме Гук сообщает о новых измерениях дуги меридиана (и, следовательно, радиуса Земли) французской экспедицией Пикара.

Ньютон ответил очень быстро — через четыре дня. Это замечательное письмо Ньютона от 28 ноября 1679 года начинается с признания Ньютона, что он распро-

щался с философией и давно уже занимается другими делами. По-видимому, сказывается возраст (Ньютону уже 37 лет, а это тот возраст, когда заниматься математикой да и философией вообще становится затруднительно). «Я ничего не слышал,— пишет Ньютон,— о Ваших гипотезах о движении планет, несомненно хорошо известных ученому миру... Моя страсть к философии утихла, и я думаю о ней не больше, чем торговец о чужой торговле или крестьянин об ученьи.»

Словом «философия» в то время называли все точные науки в целом. Физика тогда называлась натуральной философией. А другие дела, о которых пишет Ньютон, заключались, судя по всему, в увлечении алхимией. (Ее он, по-видимому, к философии не причислял, хотя цель этой науки состояла в отыскании философского камня.) У Ньютона была большая химическая (или, если угодно, алхимическая) лаборатория, и он, интенсивно поработав в возрасте 20—30 лет в области математики и физики и сделав там действительно очень много, теперь занимался в основном получением золота. Он собирал в большом количестве алхимические рецепты, сохранившиеся еще от средневековья, и намеревался изготовить золото в соответствии с содержащимися в них указаниями. Усилия, затраченные им на это, значительно превосходили те, что пошли на создание его математических и физических работ, но ни к какому полезному результату они не привели. Сам Ньютон, правда, в этом порой не был уверен. Рассказывают, что в его тетрадях (а он подробнейшим образом записывал свои опыты, записывая, что с чем сливал, и какие при этом получались результаты, для того, чтобы, получив случайно золото, этот процесс воспроизвести) встречается запись, в которой после подробного описания произведенных действий так сообщается о результате: «Вонь ужасная. Видимо я близок к цели.»

§ 2. Задача о падении тел

Вернемся к письму Ньютона. Он пишет далее, что, хоть и решил в таком почтенном возрасте не соперничать с более молодыми умами, он может предложить одну задачу, которая представляется ему достойной такого тонкого экспериментатора, как Гук. Эта задача — проверка учения Коперника. Как утверждает Коперник,

Земля движется вокруг Солнца, а кроме того, вращается вокруг собственной оси. Ньютон предлагает проверить экспериментально второе утверждение. Действительно, согласно галилееву принципу инвариантности, равномерно прямолинейное движение само по себе обнаружить невозможно, а вот вращение, в принципе, все-таки можно наблюдать. Поэтому, говорит Ньютон, чтобы убедить неверящих в теорию Коперника (признанную католической церковью, например, только в 1937 году), стоит попробовать проверить ее опытным путем. По-видимому, Ньютон первым поставил задачу об экспериментальном доказательстве вращения Земли. Более того, предлагая эту задачу Гуку, Ньютон указал способ, в принципе позволяющий это сделать.

Рис. 2. Траектория в невращающемся пространстве

Предложение Ньютона состоит в следующем. Если Земля вращается, то предметы, свободно падающие с большой высоты, будут отклоняться от вертикали. Поэтому достаточно измерить отклонение падения тяжелых шаров от вертикального направления (устанавливаемого при помощи отвеса), чтобы обнаружить вращение Земли.

В самом деле, рассуждает Ньютон в этом письме, представим себе, что мы смотрим на Землю с Северного полюса и видим экватор и гору или, лучше, башню, с которой бросаются свободно падающие шары, покоящиеся в начальный момент относительно башни (рис. 2). Предположим, что Коперник прав, и Земля вращается с запада на восток. Невежда подумает, пишет далее Ньютон, что тогда, пока шар будет падать, Земля под ним повернется на восток и шар упадет западнее того места, над которым он находился первоначально.

Но такое мнение, часто выдвигаемое в качестве возражения против теории Коперника, совершенно неправильно. Ошибка состоит в том, что у шара в момент броска была ненулевая начальная скорость относительно «неподвижной» системы отсчета, направленная на восток. Более того, шар находился над Землей, поэтому эта скорость была больше, чем скорость точек на поверхности Земли. Но скорость шара в горизонтальном направлении не будет меняться во время его падения, так

что он пройдет в восточном направлении больший путь, чем точка поверхности, над которой он находился. Таким образом, шар должен упасть не западнее, а восточнее этой точки.

Если бросать шары не на экваторе, а на нашей широте, то эффект будет несколько меньше, но тем не менее, говорит Ньютон, обнаружить его было бы возможно. Конечно, эффект этот очень мал, поэтому Ньютон советует сделать следующее. Под точкой бросания строго по отвесу надо натянуть в направлении с севера на юг тонкую проволоку и бросать возможно более тяжелые шары, подвешивая их на нити и пережигая ее, чтобы избежать нежелательных начальных толчков. Тогда, если бросить шар достаточно много раз и подсчитать, сколько раз шар, ударившись о проволоку, отлетел на восток, а сколько раз — на запад, можно будет, сравнив эти два числа, определить, наблюдается ли тонкий эффект отклонения на восток, или нет.

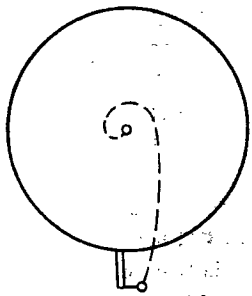

Рис. 3. Траектория внутри Земли по Ньютону

В своем замечательном письме Гуку Ньютон затронул еще один вопрос. Он писал, что было бы очень интересно узнать, как двигался бы шар после достижения поверхности, если бы в Земле была шахта (т. е. шар свободно бы проходил сквозь Землю, не встречая сопротивления). Ньютон считает, что тогда шар бы описал спираль, и для наглядности приводит эту спираль в письме (рис. 3).

Гук прочитал письмо Ньютона на заседании Королевского общества 4 декабря 1679 года. Это вызвало бурную дискуссию, в которой приняли участие многие ученые. Все стали оживленно обсуждать, действительно ли можно наблюдать описанное Ньютоном явление и в какую сторону должны отклоняться шары. Например, королевский астроном Флемстид выступил, как зафиксировано в протоколах Общества, с заявлением, что эффект этот давно уже известен в артиллерии. А именно, по мнению Флемстида, ядро падает обратно в жерло при угле возвышения 87° (видимо, поэтому даже сейчас ограничители зенитных орудий не позволяют поднять ствол вверх на угол больше 87°). Это, по мнению Флем-

стида, свидетельствует о вращении Земли, ибо иначе опасный угол был бы 90°. Иными словами, Флемстид предложил несколько видоизменить предложение Ньютона. Вместо того чтобы бросать шары вниз, Флемстид предложил стрелять пушечными ядрами вертикально вверх и смотреть, будут ли они падать обратно.

Гук выступил на следующем заседании 11 декабря, сделав несколько критических замечаний по поводу рассуждений Ньютона, на что Ньютон, не переносивший ни малейшей критики, ответил 13 декабря длинным письмом, содержащим пространное обсуждение вопроса и ясно показавшим, что в это время Ньютон еще не знал, как на самом деле должна выглядеть траектория шара.

Во-первых, Гук сделал следующее замечание. Необходимо учитывать, что направление вертикали — направление к центру Земли — меняется при движении шара, поэтому сила тяжести в различных точках траектории направлена по-разному. Это приводит к тому, что движущийся к востоку шар будет испытывать влияние, отклоняющее его обратно на запад. Так что, хотя шар все-таки упадет восточнее точки отвеса, результирующее отклонение будет меньше того, которое предсказывал Ньютон.

Если мы, вооружившись нашими современными знаниями, аккуратно проделаем все вычисления, то увидим, что истинный эффект составляет 2/3 того отклонения, что должно было бы получиться у Ньютона (6). Таким образом, сдвиг к востоку за счет разности в расстояниях до центра Земли и сдвиг к западу, вызванный различием в направлении силы тяжести,— величины одного порядка, так что качественное рассуждение Ньютона вообще неверно. Ведь имей эти два эффекта — отклонение к востоку и отклонение к западу — несколько другое отношение,— и качественная картина была бы другой.

Во-вторых, Гук справедливо замечает, что в северном полушарии шар будет отклоняться не только к востоку, но также и к югу. Более того, он утверждает (по непонятной причине), что в наших широтах отклонение на юг будет даже больше, чем на восток.

Наконец, третье замечание Гука относится к траектории движения шара внутри Земли. Он говорит, что спираль, нарисованная Ньютоном, вызывает у него сомнения. По его мнению, внутри будет происходить приблизительно то же, что при колебании маятника

на веревке, и если шар будет свободно двигаться внутри Земли не испытывая сопротивления, то его траектория будет замкнутой и напоминающей эллипс (рис. 4), а спираль может получиться лишь с учетом сопротивления воздуха. Но и в этом случае спираль получится совсем не такая, как у Ньютона,— не делающая один виток, а медленно закручивающаяся, с большим количеством оборотов (рис. 5).

Действительно, если мы при помощи современных наших методов решим эту задачу, то увидим, что внутри Земли действует уже не закон всемирного тяготения,

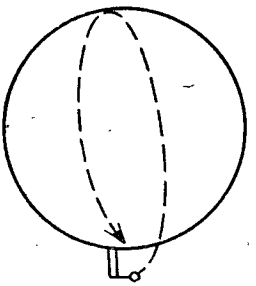

Рис. 4. Траектория внутри Земли по Гуку

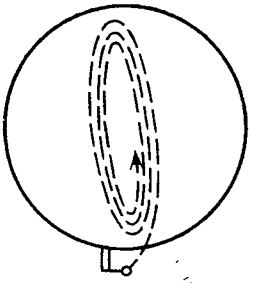

Рис. 5. Учет сопротивления воздуха по Гуку

а закон Гука — сила притяжения прямо пропорциональна расстоянию до центра Земли. Поэтому внутри траектория шара будет такой же, как при упругих колебаниях (или как у маятника), т. е. эллиптической.

Покритиковав Ньютона, Гук теоретическими рассуждениями не ограничился и решил все-таки произвести экспериментальную проверку. О ее результатах он доложил Обществу 18 декабря. Он организовал опыты несколько иначе и бросал шары не на проволоку, а на вощеную доску, расположенную под слоем воды, который должен был ослаблять силу удара. На доске была нанесена сеточка из тонких линий с центром под точкой подвеса для того, чтобы можно было по следу шара определить отклонение не только на запад или восток, но и в направлении север — юг. Шары бросались в соборе с высоты около 9 м при тщательно закрытых дверях и окнах, чтобы предохранить шар от вредного воздействия сквозняков. Если как следует все подсчитать, учтя турбулентность, то станет ясно, что при такой маленькой высоте никакого эффекта наблюдаться не может (теоретическое отклонение — 0,3 мм).

Но Гук был очень искусным экспериментатором. С тех пор ни у кого больше этот опыт не получался, но у Гука он «получился». Королевскому обществу Гук сообщил, что шар при трех испытаниях каждый раз отклонялся на юго-восток не менее чем на четверть дюйма. По-видимому, он не совсем владел статистическим анализом, и число испытаний было недостаточно велико. Кроме того, он, скорее всего, не проверил полученное отклонение по соответствующему уровню значимости и признал явление установленным, хотя ничего еще толком доказано не было. В начале 1680 года Гук повторил свои эксперименты и снова «успешно». Об их результатах он сообщил Ньютону в письме, посланном 6 января.

§ 3. Закон обратных квадратов

Помимо рассказа об экспериментах, в этом письме Гука содержатся такие важные слова: «Я предполагаю, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, соответственно предположению Кеплера о зависимости скорости от расстояния. Галлей, вернувшись с острова св. Елены, рассказал мне, что маятник качается медленнее на вершине горы, чем у подножья, и не мог понять причины. Я сказал ему, что он решил давно занимавший меня вопрос об убывании тяготения с удалением от центра... Говоря о падении внутри Земли, я не думаю что закон притяжения будет таким же до самого центра Земли, но, напротив, я считаю, что, чем ближе тело будет к центру, тем слабее будет притяжение, возможно, подобно тому, как это происходит с маятником или телом внутри вогнутой поверхности, где сила уменьшается по мере приближения к нижней точке... Притяжение на значительных расстояниях [от небесных тел] можно вычислять по указанной пропорции [обратных квадратов] как притяжение самим центром.»

Этот закон обратных квадратов и есть, по-видимому, та теория тяготения Гука, мнение Ньютона о которой он спрашивает в первом письме, и его, по мнению Гука, необходимо учитывать исследуя падение тела как снаружи Земли, так и внутри. Правда, внутри, пишет Гук, закон, конечно же, будет другим, так как пройденные телом слои будут тянуть его в разные стороны. Поэтому закон движения внутри будет, по-видимому,

похожим на тот, что наблюдается при упругих колебаниях. Далее Гук писал, что он, исследуя эти силовые законы, пытался определить формы орбит, по которым должны были бы двигаться тела. И у него получилось, что внутри Земли орбиты будут примерно такими же, как при колебаниях маятника, а снаружи, когда есть только один притягивающий центр, тело будет двигаться по кривой, которую он назвал эксцентрическим эллиптоидом.

Скорее всего, дело обстояло так. Гук, не имея необходимого математического аппарата, не сумел точно решить уравнений движения, получающихся из закона обратных квадратов, и, чтобы найти орбиты, численно, графически или на аналоговой машине вроде упомянутой им вогнутой поверхности эти уравнения проинтегрировал. Известно, что такая машина у Гука была: он исследовал характер движения при различных законах притяжения, моделируя притяжение действием поверхности на скользящий по ней груз. (Заметим, что все это происходило за шесть лет до того, как была написана книга Ньютона и сформулированы общие законы механики. По нашим современным представлениям в то время еще механики не было. Тем не менее в эти домеханические времена Гук находит приближенные решения уравнений движения для закона обратных квадратов, а Гюйгенс формулирует закон сохранения энергии. Правда, Гюйгенс привел его не в самом общем виде, но и в его формулировке (7) закон был применим в нашем случае и позволял понять, что при отсутствии сопротивления воздуха орбиты камня внутри Земли должны быть замкнутыми.) Проинтегрировав уравнения движения, Гук нарисовал орбиты и увидел, что они похожи на эллипсы. Отсюда и возникло слово эллиптоид. Назвать их эллипсами ему не позволила научная честность, так как доказать эллиптичность он не смог. Сделать это Гук предложил Ньютону, сказав, что он не сомневается, что Ньютон с его превосходными методами справится с этой задачей и убедится также и в том, что первый закон Кеплера (утверждающий, что планеты движутся по эллипсам) тоже следует из закона обратных квадратов.

Отправив Ньютону письмо с таким предложением, Гук перешел к следующим открытиям, так как времени заниматься математическими подробностями у него не было. Ньютон же замолчал и больше никогда ничего

Гуку не писал (за исключением одного случая, когда он переслал Гуку просьбу одного итальянского врача, желающего сотрудничать с Королевским обществом, и, пользуясь случаем, поблагодарил за сведения об экспериментах с падающими шарами), о переписке с ним нигде не упоминал (хотя письма хранил) и о том, что Гук поставил перед ним задачу о тяготении, никому не говорил.

Но за задачу эту Ньютон взялся, исследовал закон движения, убедился, что действительно получаются эллиптические орбиты, доказал, что, и обратно, из закона Кеплера об эллиптичности орбит следует закон обратных квадратов *). Для того, чтобы все это как следует оформить и изложить в доступном виде, ему потребовалось сформулировать основные принципы, относящиеся к общим понятиям, таким как масса, сила, ускорение. Так появились знаменитые «три закона Ньютона», на которые сам Ньютон, правда, не претендовал (первый закон — это всем давно и хорошо известный закон инерции Галилея, а остальные два никак не могли быть открыты позже чем, скажем, закон упругости Гука или формула Гюйгенса для центробежной силы). А вот в связи с законом всемирного тяготения Ньютон повел себя весьма неаккуратно.

§ 4. Principia

По инициативе астронома Галлея (1656—1742) Ньютон написал работу с подробным изложением своих результатов под названием «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математические начала натуральной философии») и прислал ее Королевскому обществу 28 апреля 1686 года. В рукописи Гук не был упомянут ни разу. Галлею, который был другом обоих, это не понравилось, и он убедил Ньютона вставить ссылку на Гука. Ньютон поддался на уговоры, но сделал это в весьма оригинальной форме. Он написал, что именно закон обратных квадратов соответствует третьему закону Кеплера, «как утверждали независимо Рен, Гук и Галлей». И Рен и Галлей — люди, разумеется, не случайные. Рен — архитектор, один из основателей Королевского общества, занимавшийся вместе с Гуком восста-

*) Доказательства приведены ниже, на с. 75—79.

новлением Лондона после великого пожара 1666 года, — принимал активное участие в дискуссии по вопросам движения тел. Галлей, предсказавший впоследствии возвращение носящей его имя кометы, приложил много усилий к тому, чтобы заставить Ньютона написать эту книгу, а его опыты с часами на острове св. Елены послужили для экспериментального подтверждения закона тяготения. Так что, поместив Гука между ними, Ньютон не только принизил его роль, но и лишил его поддержки друзей в начавшемся вскоре приоритетном споре.

Здесь уместно сказать несколько слов о материальном положении наших героев. Гук был беден и жил на жалование, которое выплачивало ему Королевское общество. Кроме того, он подрабатывал, используя свои обширные познания в области механики при проведении огромных восстановительных работ после лондонского пожара. Этот архитектурный заработок и помог ему в конце концов создать себе некоторое благополучие. Ньютон на кафедре в Кембридже получал значительно больше, и примерно такой же доход приносила ему унаследованная им ферма, которую он сдавал в аренду и где росла знаменитая яблоня. Несмотря на то что Ньютон был довольно обеспеченным человеком, тратиться на издание книги ему не хотелось, и он прислал Principia в Королевское общество, которое постановило издать их на свои деньги. Но денег у Общества не было, поэтому рукопись лежала до тех пор, пока Галлей (а он был сыном богатого мыловара) не издал ее за свой счет. Галлей взял на себя все заботы по изданию книги, он даже сам читал корректуры, и Ньютон в переписке того времени называл ее «Ваша книга»...

В этой переписке с Галлеем Ньютон, отвечая на просьбу упомянуть Гука, написал замечательную фразу, раскрывающую его мнение о различии между математиками и физиками. Себя Ньютон считал математиком, а Гука считал физиком. Вот как он описывает разницу в подходах математика и физика к естествознанию.

«Математики, которые все открывают, все устанавливают и все доказывают, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих. Другой же, который ничего не может доказать, а только на все претендует и все хватает на лету, уносит всю славу как своих предшественников, так и своих последователей... И вот я должен признать теперь, что я все получил от него, а что я сам всего только подсчитал, доказал и выпол-

нил всю работу вьючного животного по изобретениям этого великого человека».

Надо сказать, что все открытия, содержащиеся в Principia, Ньютон сделал не пользуясь анализом, хотя им к тому времени владел. Все, что требовалось, он доказал при помощи более или менее эквивалентных анализу прямых геометрических элементарных рассуждений (а не переводя аналитические выкладки на геометрический язык) — ему это было легче.

§ 5. Притяжение сфер

Посмотрим, в качестве примера рассуждений Ньютона, как он доказывал, что на камень внутри Земли внешние слои не действуют, т. е. что *поле тяжести внутри однородной сферы равно нулю*. Раньше этот факт изучался в школе, но теперь он из программы выпал, поэтому это замечательное доказательство, возможно, известно не всем.

Рассмотрим внутри шара, ограниченного бесконечно тонким шаровым слоем, точку P (рис. 6), возьмем маленький телесный угол с вершиной в P и докажем, что силы, с которыми на помещенное в точке P тело действуют два бесконечно малых объема, высекаемых этим углом из шарового слоя, уравновешиваются. (Сейчас, преподавая анализ, не очень-то любят говорить о бесконечно малых величинах, из-за чего современные студенты не вполне владеют этим языком. Между тем им все-таки владеть надо.) Эти два объема представляют собой бесконечно малые призмы (их образующие, конечно, слегка расходятся, но величиной этого раствора можно пренебречь, так как ошибка будет бесконечно малой более высокого порядка), объемы которых можно вычислять по формуле $V = lS$, где l — длина бокового ребра, а S — площадь поперечного сечения. Но ребра у наших призм равны как отрезки, высекаемые на прямой парой концентрических окружностей, а поперечные сечения относятся как квадраты расстояний

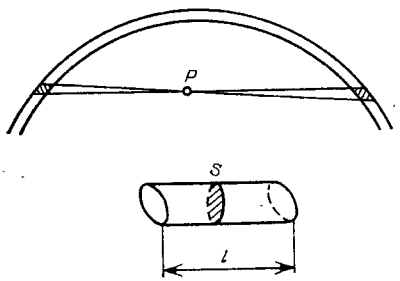

Рис. 6. Притяжение шарового слоя по Ньютону

до P. Таким образом, эти два объема тянут тело в точке P в разные стороны с одинаковыми силами. Точно так же уравновешиваются и все другие влияния, поэтому равнодействующая всех сил равна нулю.

Этот образчик ньютоновского рассуждения показывает, как можно было решать задачи из теории потенциала без анализа, не зная ни теории гармонических функций, ни фундаментального решения уравнения Лапласа, ни потенциалов простого и двойного слоя. Подобные рассуждения, предшествовавшие возникновению анализа, часто встречались в работах тех времен и оказывались чрезвычайно мощными. Вот пример задачи, которую люди вроде Барроу, Ньютона, Гюйгенса решили бы за считанные минуты (8) и которую современные математики быстро решить, по-моему, не способны (во всяком случае, я еще не видел математика, который быстро бы с ней справился): вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

Ньютон доказал также, что *однородный шар* (или шаровой слой) *притягивает точки внешней области так же, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре.* Доказательство Ньютона элементарно, но не просто (как не просто в лоб посчитать соответствующий интеграл). Приведенное ниже современное доказательство (восходящее к Лапласу), к сожалению, выходит за рамки преподаваемых в школе (и, как это ни странно, на механико-математическом факультете МГУ) наук.

Рассмотрим поле скоростей несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство и сферически-симметрично растекающейся по радиусам от находящегося в начале координат источника. Скорость такого течения обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Действительно, вследствие несжимаемости, через каждую сферу с центром в источнике за единицу времени протекает одинаковый поток жидкости (столько, сколько производит источник). Вследствие сферической симметрии течения, этот поток равен произведению площади сферы на величину скорости протекания через нее. Но площадь сферы прямо пропорциональна квадрату радиуса. Значит, чтобы поток не зависел от радиуса, величина скорости должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Итак, *закон убывания скорости сферически-симметричного течения несжимаемой жидкости с расстоянием от центра такой же, как закон убывания силы тяготения.* (Отсюда видно, как выглядит естественный аналог поля тяготения в n-мерном пространстве: сила должна убывать обратно пропорционально $n-1$-й степени расстояния.)

Мы доказали, что поле силы притяжения материальной точкой обладает следующим замечательным свойством *несжимаемости*: если считать его полем скоростей течения, то величина потока через границу любой ограниченной области, не содержащей притягивающую точку, равна нулю: сколько втекает, столько и вытекает.

Оказывается, при любом распределении масс поле силы притяжения этими массами вне этих масс обладает таким же свойством несжимаемости. Действительно, при сложении полей скоростей величины их потоков через любую поверхность складываются. Поэтому при сложении полей скоростей двух течений несжимаемой жидкости вновь получится поле скоростей несжимаемой жидкости: поток суммарного поля через границу области равен нулю, если равны нулю потоки складываемых полей. Итак, *суммарная сила притяжения несколькими массами обладает свойством несжимаемости* (в области вне притягивающих масс).

В частности, рассмотрим поле силы притяжения однородным шаром (или шаровым слоем). Во внешней области это поле совпадает с полем скоростей несжимаемой жидкости (как только что доказано). Оно сферически-симметрично. Но единственное сферически симметричное поле скоростей несжимаемой жидкости обратно пропорционально квадрату расстояния до центра. Значит, шар (или слой) притягивает внешние точки так же, как некоторая масса, помещенная в центр. Что масса в центре должна совпадать с полной массой шара (или слоя), видно из сравнения потоков через сферы, охватывающие исследуемый шар.

Теорема о том, что слой не притягивает внутренние точки, также следует из этого рассуждения*). [Обе теоремы Ньютона (о притяжении сферическими слоями внутренних и внешних точек) распространяются и на притяжение слоями между гомотетичными эллипсоидами (роль центра играет при этом любой конфокальный эллипсоид, меньший изучаемого). Эллипсоиды можно даже заменить алгебраи-

*) Задача. Вычислить среднее значение функции $1/r$ по сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ и функции $\ln 1/r$ по окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

ческими поверхностями любой степени (9). Важно лишь, чтобы поверхность была гиперболической (пересекала каждую прямую, выходящую из некоторой точки, столько раз, какова степень уравнения поверхности).]

§ 6. Доказал ли Ньютон эллиптичность орбит?

В заключение рассказа о законе всемирного тяготения стоит сказать несколько слов о дискуссии, которая развернулась вокруг него в самые последние годы в физических журналах. В прошлом такая дискуссия была бы невозможной, но теперь ситуация изменилась благодаря тому, что дух современной математики проник и в ряды физиков, нанеся им, как это сейчас станет ясно, некоторый ущерб. Они начали сомневаться в таких вопросах, о которых раньше никто бы и разговаривать всерьез не стал. В этой дискуссии приняло участие большое число физиков (отчет о ней можно прочесть в одном из выпущенных недавно сборников «Физика за рубежом» (10), а тема спора формулировалась следующим образом: доказал ли Ньютон, что из закона всемирного тяготения следует первый закон Кеплера?

В действительности, речь идет вот о чем. Для траектории движущегося под действием силы тяжести тела законы Ньютона дают дифференциальное уравнение

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k\vec{r}}{r^3}.$$

Вместо того чтобы решать его по всем правилам науки, Ньютон в своей книге предъявил много решений этого уравнения и проверил, что для любого начального условия среди них имеется удовлетворяющее ему решение. Иными словами, для любой точки и вектора в пространстве во множестве найденных Ньютоном орбит найдется такая, которая в начальный момент проходит через эту точку и имеет там данный вектор скорости. При этом, если начальная скорость тела не слишком велика, то орбита получается эллиптической. Но кто сказал, спрашивают искушенные в математических тонкостях физики, что не существует какой-нибудь другой траектории, удовлетворяющей тем же самым начальным условиям, по которой тело движется, соблюдая закон всемирного тяготения, но совершенно иначе? Математики знают, что отсутствие такой другой траектории называется теоремой единственности. Таким образом, чтобы выводить из закона

всемирного тяготения, что тела движутся так, а не иначе, Ньютону надо было не только предъявить много решений дифференциального уравнения, но и доказать для него теорему единственности. Доказывает он ее? Нет. Ну, тогда и пользоваться этим законом для описания действительности тоже, вообще говоря, нельзя, пока не доказана теорема единственности. Кто это сделал первым? Иоганн Бернулли. Значит, это он, а не Ньютон, вывел закон Кеплера из закона всемирного тяготения, ему и должна принадлежать вся слава. Вот как говорят физики, участвовавшие в дискуссии, повторяя давно сказанное математиками (например, в книге А. Винтнера 1941 года).

На самом деле весь этот спор основан на глубоком заблуждении. Современные математики действительно различают теоремы существования и теоремы единственности для дифференциальных уравнений и даже приводят примеры уравнений, для которых теорема существования выполнена, а теорема единственности нет (11). Так что возможны различные неприятности, и, если бы уравнение Ньютона было неприятным, действительно нельзя было бы делать никаких выводов. Ошибочная точка зрения происходит из-за неоправданного расширения класса рассматриваемых функций. Дело в том, что в современной математике понятия функция, векторное поле, дифференциальное уравнение приобрели иной смысл по сравнению с классической математикой. Говоря о функции, мы можем иметь в виду довольно скверный объект — нечто один раз дифференцируемое или даже ни разу, при этом мы должны задумываться о содержащем его функциональном классе и т. д. А во времена Ньютона под словом функция понимали только очень хорошие вещи. Иногда это были многочлены, иногда рациональные функции, но во всяком случае все они были аналитическими в своей области определения и разлагались в ряды Тейлора. В этом случае теорема единственности никакой проблемы не представляет, и о ней тогда просто никто не думал.

Но в действительности у Ньютона все доказано и по более строгим меркам. Верна такая теорема.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(t, x)$$

и пусть для любого начального условия a предъявлено решение $x(t, a)$ с $x(0, a) = a$, причем это решение гладким (т. е. бесконечно дифференцируемым) образом за-

висит от a. Тогда для этого уравнения верна теорема единственности.

Теорема эта доказывается очень легко. Из существования гладко зависящего от начальных данных решения следует, что существует (локальный) диффеоморфизм, который выпрямляет исходное поле направлений, приводя его к стандартному виду поля горизонтальных направлений (наше решение и дает этот диффеоморфизм: $(t, a) \leftarrow$ $\leftarrow (t, x(t, a))$). А для выпрямленного поля теорема единственности, очевидно, выполнена, так как уравнение принимает вид $\dot{a} = 0$.

Таким образом, *из существования решения единственность, вообще говоря, не следует, но все будет в порядке, если предъявленное решение гладко зависит от начального условия.*

Посмотрим, что было у Ньютона. Он для каждого начального условия предъявил решение, описал его, и из этого описания сразу становилось ясно, что указанное решение гладким образом зависит от начального условия. Итак, сомнений в единственности нет, и Ньютон правильно доказал первый закон Кеплера.

Можно, конечно, возразить, что Ньютон не знал этой теоремы. Действительно, он ее не формулировал в таком виде, как это сейчас сделали бы мы. Но по существу он ее наверняка знал, так же как и многие другие приложения теории возмущений,—математический анализ Ньютона в значительной мере и есть далеко развитая теория возмущений.

Ньютон заметил, что законы природы выражаются изобретенными им дифференциальными уравнениями. Отдельные, и порой очень важные, дифференциальные уравнения рассматривались и даже решались и раньше, но именно Ньютону они обязаны своим превращением в самостоятельный и очень мощный математический инструмент.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 7. Анализ как теория степенных рядов

Ньютон открыл способ решения любых уравнений, причем не только дифференциальных, но и, например, алгебраических. Это открытие он считал самым важным своим достижением и именно его закодировал в письме к Лейбницу 24 октября 1676 года (посланном через Оль-

денбурга и потому вошедшим в историю под названием «Второе письмо к Ольденбургу» (epistola posterior)), в котором он описал анализ.

Анализ — это довольно трудно определяемое понятие. Ньютон понимает под анализом исследование уравнений при помощи бесконечных рядов. Основное открытие Ньютона, иными словами, заключается в том, что все надо раскладывать в бесконечные ряды*). Поэтому, когда ему приходилось решать уравнение, будь то дифференциальное уравнение или, скажем, соотношение, определяющее некоторую неизвестную функцию (теперь это называли бы одним из видов теоремы о неявной функции), Ньютон действовал по следующему рецепту. Все функции раскладываются в степенные ряды, ряды подставляются друг в друга, приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях и один за другим находятся коэффициенты неизвестной функции. Теорема о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений этим способом доказывается мгновенно заодно с теоремой о зависимости от начальных условий, если только не заботиться о сходимости получающихся рядов. Что касается сходимости, то ряды эти сходятся настолько быстро, что Ньютон, хотя сходимости строго и не доказывал, в ней не сомневался. Он владел понятием сходимости и явно вычислял ряды для конкретных примеров с огромным числом знаков (в том же письме Лейбницу Ньютон пишет, что ему «просто стыдно признаться», с каким числом знаков он проделал эти вычисления). Он заметил, что его ряды сходятся как геометрическая прогрессия и потому сомнений в сходимости его рядов у него не было. Вслед за своим учителем Барроу, Ньютон сознавал, что анализ допускает обоснование, но совершенно справедливо не считал полезным на нем задерживаться («Можно было бы удлинить апагогическим**) рассуждением,—писал Барроу,—но для чего?»).

§ 8. Многоугольник Ньютона

Кроме степенных рядов, в которые раскладывались решения дифференциальных уравнений, Ньютон пользовался и дробно-степенными, применяющимися, когда

*) «Это учение [о степенных рядах] находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях — к обыкновенной арифметике» (12).

**) «От противного», т. е. строгим.

надо найти разложение для алгебраической функции $y(x)$, заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Пусть, например, надо решить алгебраическое уравнение

$$ax^2 + by^3 + cxy^2 + dx^7 = 0.$$

Тогда, говорит Ньютон, надо сделать следующее преобразование (сейчас аналогичные преобразования называют преобразованиями Фурье, но в данном случае это все-таки *преобразование Ньютона*). Многочлен перестают считать функцией переменных x и y, а рассматривают его как функцию на целочисленной решетке на плоскости. В точке с координатами (m, n) эта функция принимает значение, равное коэффициенту многочлена при $x^m y^n$. Теперь отметим на решетке точки, соответствующие одночленам с ненулевыми коэффициентами, и возьмем их выпуклую оболочку. Получится многоугольник Ньютона (рис. 7). Оказывается, что одночлены, которые соответствуют вершинам, оказавшимся внутри многоугольника, на форму ряда не влияют, про них пока можно забыть, а рассматривать надо только стороны. Например, стороне AB на рис. 7 отвечает двучленное уравнение $ax^2+by^3=0$.

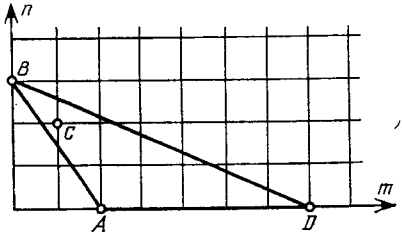

Рис. 7. Многоугольник Ньютона

Решив это уравнение, забыв пока про все остальное, найдем y как функцию от x: $y = kx^{2/3}$. Эта функция дает хорошее приближение около нуля к решению нашего уравнения. Если мы хотим найти следующее приближение, то надо написать $y = kx^{2/3} + z$ и подставить это в исходное уравнение. После подстановки снова получится алгебраическое уравнение, но теперь относительно z, с которым надо поступать точно так же. Итерируя этот процесс, мы получим дробно-степенной ряд (теперь он называется рядом Пюизо), который дает решение $y(x)$ уравнения в окрестности начала координат. Этот метод всегда действует. Если бы мы начали с другой стороны многоугольника, то пришли бы к другому ряду, который соответствует другой ветви алгебраической функции. Сторона BD на рис. 7 отвечает за асимптотику на бесконечности.

Я рассказал здесь этот небольшой кусочек из работы Ньютона, которой он очень гордился и которая помещена в том же самом письме 1676 года Ольденбургу, отчасти

потому, что его, к сожалению, не рассказывают студентам на первом курсе, хотя это основной рабочий аппарат в локальном анализе, и к тому же очень красивый. В современной математике многоугольники (и многогранники) Ньютона включаются в геометрию торических многообразий, возникшую около 1973 года *), а в физике и в механике — в теории подобия, размерностей и автомодельности.

Письмо к Ольденбургу предназначалось, как уже говорилось, Лейбницу. Но Лейбниц жил в Германии, а Ньютон жил в Англии, и в те времена было небезопасно переписываться с иностранными учеными. Ньютон письма Лейбницу не посылал, а отправил его секретарю Королевского общества Ольденбургу, чтобы письмо дошло официальным путем. Ольденбург же передал это письмо Лейбницу. Предосторожность Ньютона не была излишней. Чересчур общительного Ольденбурга заключили в Тауэр за связь с иностранцами.

§ 9. Барроу

Теперь речь пойдет о началах анализа, и начну я с рассказа о Барроу. Учитель Ньютона Исаак Барроу родился в 1630 году и умер в 1677 году (13). В отличие от робкого и застенчивого Ньютона, который, даже будучи избран представителем от Кембриджа в Парламент, не произнес там ни слова (утверждают, правда, что один раз Ньютон все-таки выступил на заседании Парламента, но с очень краткой речью: он попросил закрыть окно), Барроу в юности был очень буйным человеком. Отец его — лондонский торговец полотном — убедился, что пускать сына из-за буйства характера по купеческим делам нельзя, и отправил его учиться.

Барроу обучался разным наукам, но больше всего его привлекла теология. По его собственным словам, ход мыслей, определивший его дальнейший путь, был таким: «Чтобы быть хорошим теологом, надо знать хронологию. . .»

Идея о том, что хронология — очень важная наука, была для всех в то время очевидной, не обошла она и Ньютона. И сейчас некоторые математики, вероятно, вслед за Барроу и Ньютоном, хотя и не в Англии, а в Москве,

*) Khovanskii A. G. The Geometry of Formulas // Mathematical Physics Reviews.—N. Y.: Harwood, 1984 (Soviet Scientific Reviews, Section C.), — Vol. 4.— P. 67—92.

остро интересуются проблемами хронологии (14). Ньютон очень серьезно занимался хронологией Древнего Египта. В ней была следующая проблема. Исторических свидетельств, открытых к тому времени, накопилось уже столько, что они никак не согласовывались с библейскими сроками сотворения мира. Промежуток времени, отпущенный по Библии на все человечество от Ноя до рождества Христова, всего 2348 лет, а фараонов и династий много, и все не умещаются. Ньютон писал специальные тексты, в которых предлагался некоторый выход из этого затруднения. Он нашел в Библии фараона, имя которого начинается с буквы С (Сесак), а у Геродота упомянут другой фараон, с другим, правда, именем, но тоже на С (Сезеострис, теперь называемый Сенурсет). Вот Ньютон и предложил считать этих двух фараонов одним, исправив соответствующим образом древнеегипетскую хронологию (сократив ее на 2000 лет — вполне в духе современных математиков). Но, по-видимому, в это время созревали и более научные подходы к этому вопросу. Барроу, например, предполагал использовать свидетельства о затмениях. И поэтому он говорит: «Чтобы быть хорошим теологом, надо знать хронологию, которая требует знания астрономии.»

Знакомство с астрономией в свою очередь привело Барроу к геометрии. Это связано с двумя причинами. Во-первых, надо телескоп наводить на звезды, а во-вторых, телескоп надо делать, т. е. шлифовать для него линзы. Начало деятельности Ньютона тоже связано с астрономией. Он изготовил первый рефлектор: зеркальный телескоп (15).

Барроу начал с того, что открыл свою знаменитую формулу линзы $\frac{1}{f} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, которую теперь проходят в школе (без упоминания имени Барроу). Чтобы вывести эту формулу, надо уметь проводить касательные к линзе, искать точки пересечения бесконечно близких нормалей, анализировать получающиеся фокальные точки. Так Барроу занялся геометрией.

Но жизнь у него, надо сказать, была очень тяжелая, так как в Англии в то время были еще очень сильны пережитки феодализма, там менялись династии, происходили революции, люди подвергались преследованиям за религиозные убеждения (в то время это считалось вполне допустимым даже в самых цивилизованных странах). Религиозные представления Барроу не совпадали с теми, которые в данный момент господствовали в Англии. Поэ-

тому ему надо было куда-нибудь оттуда уехать, и он отправился к Гробу Господню, чтобы заодно все проверить на месте. Но во время путешествия на их корабль напали пираты, и, хотя Барроу, единственный из пассажиров с мечом в руках присоединившийся к команде, принял участие в абордажной битве и пиратов победил, до цели путешествия он не добрался. Барроу благополучно вернулся в Англию, в которой к тому времени сменилась династия и религиозная обстановка. Поэтому он смог получить кафедру, основанную неким Лукой (Генри Лукасом), завещавшим деньги на организацию кафедры математики в Кембридже. Барроу, изучивший к тому времени геометрию, начал читать там лекции по математике. Ньютон был тогда студентом-второкурсником, он, по-видимому, слушал эти лекции. Лекции Барроу были впоследствии изданы, одну из его книг в 1673 году купил Лейбниц. Лейбниц, правда, говорил потом, что он редко видел человека или книгу, из которых он не мог бы сделать какого-нибудь употребления, но книгу Барроу поставил на полку и не читал.

Что же содержалось в лекциях Барроу? Бурбаки пишет с некоторым презрением, что в его книге на сто страниц текста приходится около 180 чертежей (16). (О книгах самого Бурбаки можно сказать, что там на тысячи страниц не приходится ни одного чертежа, и не совсем ясно, что хуже.) И из-за обилия этих чертежей, по мнению Бурбаки, никто не заметил того, что содержалось в этой книге, так как все ее содержание находилось в геометрическом обличии. В этой книге не вводилось новых терминов и понятий, там не было ни функций, ни производных. В основном она была посвящена развитию одного единственного принципа, из которого было выведено очень много следствий. Принцип этот заключается в том, что между задачами о касательных и задачами о площадях имеется двойственность *).

Эта двойственность позволяет нам всякий раз, когда решена какая-нибудь задача о касательных (мы знаем, как провести к некоторой кривой касательную или вычислить подкасательную, нормаль и т. д.), решить соответствующую задачу о площадях, в которой эта кривая будет ответом. В двойственной задаче речь идет о площадях под другой кривой, которую можно получить из пер-

*) Из сохранившихся бумаг Ньютона видно, что он знал об этой двойственности уже в 1665 или 1666 году, возможно, независимо от Барроу.

вой геометрически. Таким образом, эта книга фактически была посвящена формуле Ньютона — Лейбница, чего Барроу знать не мог, так как дело происходило лет на двадцать раньше их первых публикаций. Барроу выводил из этого принципа также и следствия, которые порой заходили довольно далеко. Если посмотреть внимательно, то можно обнаружить два основных таких следствия. С одной стороны, это формула замены переменных в определенном интеграле, а с другой — интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Причем в конце, дойдя до теоремы о замене переменной в интеграле, Барроу добавляет, что, к сожалению, он открыл этот факт очень поздно, а если бы знал его раньше, то многое в предыдущем тексте можно было бы упростить. Но из-за того, что у Барроу тоже было много других дел, он этих изменений в тексте не произвел.

Книга Барроу действительно читается с большим трудом (17), и недаром говорит Бурбаки, что, не разбирая эти 180 чертежей, понять в ней ничего нельзя. Но Ньютон слушал лекции Барроу и поэтому все понимал и прекрасно разбирался в содержании книги. Во многих случаях он даже упрощал или улучшал изложение, о чем Барроу, человек крайне добросовестный, сообщал читателю в соответствующей ссылке. Но главных пунктов — формулы Ньютона — Лейбница и решения уравнений с разделяющимися переменными—эта помощь Ньютона совершенно не касается. Это заслуга самого Барроу, и Ньютон на эти открытия никогда не претендовал.

Барроу, заметив такого способного ученика, которому в 27 лет уже принадлежало несколько глубоких открытий и в улучшении телескопа, и в оптике, и в геометрии, счел, что сам он уже слишком стар для того, чтобы занимать свою кафедру (ему было 39 лет) и решил перейти на идеологическую работу, а кафедру передать Ньютону. Впоследствии он столкнулся с большой трудностью. Дело в том, что Барроу имел сан священнослужителя и только благодаря этому мог постоянно занимать и кафедру. В те далекие времена постоянно занимать кафедру, не приняв священнического обета, было невозможно. Ньютон не хотел принимать обет (хотя ему обещали деканство). Тем самым Ньютон не мог оставаться на кафедре Кембриджа более, чем семь лет. Но Барроу был влиятельным человеком и, покинув Кембридж, сделался в Лондоне придворным проповедником. Поэтому он смог добиться

для Ньютона специального разрешения от короля в порядке исключения. Так Ньютон сохранил кафедру в Кембридже и продолжал там свою очень плодотворную деятельность.

§ 10. Ряды Тейлора

Интегрирование встречается уже у Архимеда, дифференцирование — у Паскаля и Ферма, связь между обеими операциями была известна Барроу. Что же сделал Ньютон в анализе? В чем его основное математическое открытие? Ньютон изобрел ряды Тейлора — основное орудие анализа.

Конечно, тут может возникнуть некоторое недоумение, связанное с тем, что Тейлор был учеником Ньютона и соответствующая его работа относится к 1715 году. Можно даже сказать, что в работах Ньютона рядов Тейлора вообще нет. Это верно, но только отчасти. Вот что было сделано на самом деле. Во-первых, Ньютон нашел разложения всех элементарных функций — синуса, экспоненты, логарифма и т. д.— в ряды Тейлора и таким образом убедился, что все встречающиеся в анализе функции разлагаются в степенные ряды. Эти ряды — один из них так и называется формулой бинома Ньютона (показатель в этой формуле, разумеется, не обязательно натуральное число) — он выписал и постоянно их использовал. Ньютон справедливо считал, что все вычисления в анализе надо проводить не путем кратных дифференцирований, а с помощью разложений в степенные ряды. (Например, формула Тейлора служила ему скорее для вычисления производных, чем для разложения функций — точка зрения, к сожалению, вытесненная в преподавании анализа громоздким аппаратом бесконечно малых Лейбница.) Ньютон вывел аналогичную ряду Тейлора формулу в исчислении конечных разностей — формулу Ньютона, и, наконец, у него есть и сама формула Тейлора в общем виде, только в тех местах, где должны быть факториалы, стоят какие-то невыписанные явно коэффициенты.

Ньютон мог сказать, какие там должны быть коэффициенты *) (ведь в формуле для конечных разностей факториалы он поставил), но не посчитал нужным это сделать. Вероятно, на это у него была психологическая причина.

---

*) В сохранившихся бумагах Ньютона ряд выписан полностью (я благодарен А. П. Юшкевичу за эту информацию).

Дело в том, что величины для Ньютона не были абстрактными числами, а имели какую-то физическую сущность. Но все величины h^n в формуле Тейлора имеют разные размерности, и, чтобы все было в порядке, перед каждой должен стоять коэффициент с соответствующей размерностью. Но тогда в другой системе единиц коэффициент тоже должен быть другим. Единой системы единиц в то время не было, единицы измерения менялись от страны к стране и даже от графства к графству. Поэтому размерные коэффициенты предпочитали не указывать в формулировках законов, а говорили просто о пропорциональности, как, например, в законе Гука: «яко удлинение, тако и сила». Если формулу Тейлора тоже записать в таком безразмерном виде, то факториалы пропадут и получится, что слагаемые в приращении функции прямо пропорциональны n-й производной и n-й степени приращения аргумента. Коэффициент пропорциональности после этого каждый может найти сам в зависимости от тех единиц, которыми он пользуется.

В формуле Ньютона исчисления конечных разностей факториальные коэффициенты потому были выписаны явно, что в этом случае единица измерения фиксирована выбором шага решетки. Громоздкие обозначения старших производных по Лейбницу удобны именно тем, что автоматически учитывают размерности, так что формулы выглядят одинаково при любой системе единиц.

Своих открытий в области анализа Ньютон не опубликовал. Он только сообщил Лейбницу, что умел «сравнивать площади любых фигур за половину четверти часа». Не знаю, достигается ли этот уровень владения анализом современными первокурсниками.

§ 11. Лейбниц

Говоря об истории анализа, нельзя не сказать несколько слов о сопернике Ньютона — Лейбнице. Ньютон чрезвычайно серьезно относился к приоритетным вопросам. Он довольно рано сформулировал такой принцип: каждый человек должен однажды сделать выбор — либо ничего не публиковать, либо потратить всю жизнь на борьбу за свой приоритет. Для себя Ньютон, по-видимому, тоже принял по этому поводу решение, выбрав и то, и другое. Он, во-первых, почти ничего не опубликовал, а во-вторых, постоянно боролся за свой приоритет.

Что касается изобретения анализа, то здесь первые публикации принадлежат Лейбницу, говорившему, что

он разработал свое дифференциальное и интегральное исчисление независимо от Барроу и Ньютона. Тем не менее дискуссия по этому поводу разгорелась настолько бурная, что в результате возникло мнение, что лучше уж вообще не отстаивать приоритет, чем вести такие дискуссии.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) был дипломатом майнцского курфюрста *), посланным им в 1672 году в Париж в очень тяжелой обстановке. В то время Франция уже была объединенной, абсолютной державой под властью Людовика XIV, чрезвычайно сильной в военном отношении, а Германия была раздробленной и не могла ничего противопоставить военной мощи Людовика XIV, чьи кавалерийские корпуса могли прокатиться по всей Германии за считанные дни и часы. Немцы этого очень опасались и хотели найти какой-нибудь выход. Лейбниц, с присущим ему дипломатическим умением, изобрел метод спасения Германии от французского нашествия и был послан в Париж для осуществления этого плана. Метод Лейбница состоял в следующем: он хотел подсунуть Людовику XIV проект завоевания Египта. Лейбниц составил соответствующий проект и действительно вручил его французскому правительству. Французское правительство через некоторое время проект реализовало. Произошло это не очень скоро, уже при Бонапарте, но проект восходит к Лейбницу.

Хотя Людовик XIV и не реализовал проект Лейбница, поездка в Париж не была бесполезной. Лейбниц там познакомился с Гюйгенсом. Гюйгенс был голландским ученым, но в 1666 году был приглашен во Францию, чтобы стать первым председателем Академии. Впоследствии, когда после отмены Нантского эдикта во Франции возобновились преследования за религиозные убеждения, ему пришлось вернуться в Голландию.

От Гюйгенса Лейбниц узнал о существовании очень интересных математических работ. Лейбниц и раньше интересовался математикой, потому что всегда интересовался всякими общими вещами и имел всякие общие идеи **).

---

*) Борца за мир и либерального правителя, даже отменившего в своем княжестве сжигание ведьм.

**) Между прочим, Лейбницу принадлежит идея и составленный по поручению Петра I проект нашей Академии Наук, и — также по поручению Петра I — проект перестройки русского судопроизводства и превращения нашего государства в правовое.

Например, он считал, что надо объединить все религии, если все не удастся, то по крайней мере все христианские, если православные не соглашаются — хотя бы католиков и протестантов, ну а если и это невозможно, то объединить хотя бы всех протестантов. Правда, и это ему не удалось, хотя он и прилагал все усилия.

Точно так же Лейбниц считал, что надо открыть так называемую характеристику *), нечто универсальное, что соединит все в науке и будет содержать в себе все ответы на все вопросы. Он и изобретал всевозможные универсальные приемы для решения всех задач сразу **). Например, он изготавливал вычислительные машины вслед за Паскалем. (В отличие от арифмометра Паскаля, арифмометр Лейбница умел еще извлекать квадратный корень.) Сам арифмометр не сохранился, но до нас дошли свидетельства о поездке Лейбница в Англию, где он демонстрировал его работу британским ученым (Гук тотчас же улучшил его конструкцию).

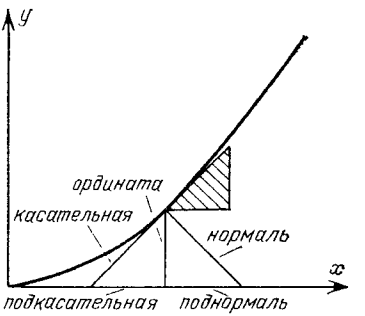

Рис. 8. Инфинитезимальный треугольник Паскаля и различные функции

Итак, математика Лейбницу очень нравилась, он хотел объединить все ее методы, и Гюйгенс посоветовал ему изучить Паскаля. Лейбниц раздобыл у наследников Паскаля его письма и записки (впоследствии утерянные) и нашел у Паскаля картинку, на которой был изображен знаменитый дифференциальный треугольник (рис. 8). К этому времени Декарт, Ферма, Паскаль умели дифференцировать многочлены и знали, как проводить касательные к параболам всех степеней, а фундаментальный бесконечно малый треугольник уже явно присутствовал в

*) А. Н. Паршин разъяснил мне, что «характеристика» Лейбница по существу совпадает с «нумерацией Гёделя», при помощи которой последний доказал неполноту всех достаточно полных теорий, опровергнув тем самым лейбницевски-гильбертовскую программу формализации математики.

**) «Хорошее наследство лучше самой красивой проблемы геометрии — писал Лейбниц Лопиталю,— так как оно играет роль общего метода и позволяет решить много проблем» (18).

Ссылка на идею универсальности не оправдывает цинизма этой шутки Лейбница: подобная кощунственная фраза была бы немыслима в устах Барроу и даже Ньютона.

работах Паскаля. В работах других геометров — Гюйгенса, Барроу — также фигурировали многочисленные объекты, связанные с данной кривой. На рис. 8, например, имеются такие величины: абсцисса, ордината, касательная (отрезок касательной от оси абсцисс до точки касания), наклон касательной, площадь криволинейной фигуры, подкасательная, нормаль, поднормаль и т. д. Обычно все эти объекты рассматривались по отдельности. Барроу, к примеру, выводил соотношения между поднормалью и подкасательной при помощи новой кривой, рисовавшейся в новой плоскости. Лейбниц, со свойственным ему стремлением к универсальности, решил, что надо все это рассматривать единым образом. Для этого он ввел единый термин для любой из величин, связанных с данной кривой, исполняющих по отношению к данной кривой какую-нибудь функцию,— термин функция. Примерами функций были все величины, встречающиеся на рис. 8. Например, абсцисса, ордината, поднормаль, подкасательная и т. д.

Таким образом, по Лейбницу с кривой было связано много функций. У Ньютона был другой термин — флюэнта, означавший текущая величина, переменная величина, и связанный тем самым с движением. На основании изучения Паскаля и своих собственных рассуждений Лейбниц довольно быстро развил формальный анализ в том виде, в котором мы его сейчас знаем. То есть в виде, специально приспособленном для обучения ему людей, которые его совсем не понимают. Лейбниц писал: «Плохая голова, обладая вспомогательными преимуществами, . . . может перещеголять самую лучшую, подобно тому, как ребенок может провести по линейке линию лучше, чем величайший мастер от руки». (G u h r a u e r, Leibniz's deutsche Schriften, Bd. I,S. 377—381). Формальные правила оперирования с бесконечно малыми, смысл которых неясен, Лейбниц довольно быстро установил.

Способ у Лейбница был такой. Он считал, что вся математика, так же как и вся наука, находится внутри нас, и с помощью одной философии можно до всего додуматься, если внимательно прислушаться к процессам, происходящим внутри нашего разума. Таким методом он открывал различные законы и иногда очень успешно. Например, он открыл, что $d(x + y) = dx + dy$, и это замечательное открытие немедленно заставило его задуматься о том, чему же равен дифференциал произведения. В соответствии с универсальностью своих размышлений он быстро пришел к выводу, что дифференцирование — гомоморфизм

кольца, т. е. что должна иметь место формула $d(xy) = dx \cdot dy$. Но через некоторое время он убедился, что это приводит к каким-то не приятным следствиям, и нашел правильную формулу $d(xy) = xdy + ydx$, которая теперь называется правилом Лейбница. Никому из индуктивно мыслящих математиков — ни Барроу, ни Ньютону, которого впоследствии называли эмпирическим ослом,— никогда бы не пришла в голову первоначальная гипотеза Лейбница, так как им было совершенно очевидно, чему равен дифференциал произведения, из простой картинки (рис. 9). Ясно, что приращение площади прямоугольника составляется из трех слагаемых: площадей двух бесконечно тонких прямоугольников xdy и ydx и бесконечно малого более высокого порядка $dxdy$, которым можно пренебречь. Имея перед глазами такую геометрическую интерпретацию, никак не заподозришь, что искомое приращение равно этой пренебрегаемой величине. Но для схоласта Лейбница такой алгебраический ход мыслей очень типичен*).

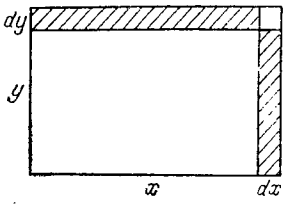

Рис. 9.
Формула Лейбница

§ 12. Дискуссия об изобретении анализа

Надо несколько слов сказать и о безобразном споре, разгоревшемся между Ньютоном и Лейбницем после того, как Лейбниц в 1684 году опубликовал свое исчисление бесконечно малых.

В течение примерно десяти лет все было тихо и мирно, но потом ученики Ньютона и Лейбница начали спорить о том, чей учитель первым придумал анализ.

Термин *анализ* употреблен Ньютоном в смысле «исследование» (кривых при помощи степенных рядов). Ньютон рассматривал анализ как развитие аналитической геометрии Декарта, которую высоко ценил.

Для составителей школьных программ и учебников может быть небезынтересно, что Ньютон выучил элементы геометрии не по Евклиду, как полагалось (и полагается, в сущности, до сих пор), а по Декарту — возможно, поэтому он и изобрел анализ!

---

*) Лейбниц еще в 1686 году считал, что окружность кривизны пересекает кривую не менее чем в четырех слившихся точках.

Ньютон тоже повел себя в этой истории не лучшим образом. Он собрал комиссию, задачей которой было разобраться с вопросом о приоритете и вынести окончательное решение. Ньютон к тому времени был уже президентом Королевского общества *), поэтому в состав комиссии для придания ей большей беспристрастности были включены, по его словам, многочисленные ученые из разных стран. Комиссия рассмотрела вопрос о приоритетном споре и опубликовала отчет. Отчету интернациональной авторитетной беспристрастной комиссии предшествовали такие слова: «Никто не может быть сам себе судьей и свидетельствовать по своему делу. Такой судья будет судьей неправедным, и будут попраны законы всех стран, если кто-то будет допущен в качестве законного свидетеля по своему собственному делу.» Далее идет оправдание Ньютона и обвинение Лейбница в необоснованных притязаниях на неопубликованные Ньютоном результаты.

Впоследствии, после смерти Ньютона, из его бумаг выяснилось, что Ньютон руководил составлением отчета, и патетическое обвинение неправедного судьи было написано лично им, а «многочисленных ученых» не из Англии было всего двое, и лишь один из них был математиком.

Оставляя эту грустную историю, из которой мы все должны делать выводы о научной ценности приоритетных и иных околонаучных дискуссий **), я расскажу немного о тех геометрических работах, которые привели к созданию анализа.

Глава 3. ОТ ЭВОЛЬВЕНТ ДО КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

§ 13. Эвольвенты Гюйгенса

Ньютону анализ был нужен в основном для исследования кривых, которые возникают в механике и в геомет-

*) Только после смерти Гука, в 1703 году Ньютон согласился занять пост президента Королевского общества. И одним из первых актов Ньютона на этом посту было уничтожение всех инструментов умершего Гука, а также его бумаг и портретов. Так что теперь Королевское общество располагает портретами всех своих членов, кроме Гука. Ни одного изображения Гука, который был членом, куратором и секретарем Королевского общества, не сохранилось. На обложке недавно выпущенной у нас книжки о Гуке (20) имеется его портрет, но портрет этот не настоящий, а составлен методами современной криминалистики по словесным описаниям Гука.

**) О положении в биологической науке: Стенографический отчет сессии ВАСХНИЛ.— М.: ОГИЗ—Сельхозгиз, 1948.— 536 с. В. Гинзбург. Заметки по поводу // Наука и жизнь. — 1988. — № 6. — С. 114 — 119.

Впоследствии, по совету Барроу, обнаружившего незнакомство своего ученика с Евклидом на экзамене, Ньютон тщательно проработал Евклида и виртуозно владел техникой древних, но первоначально Евклид ему не понравился, ибо он считал, что бессмысленно доказывать вещи, которые и так очевидны.

Анализ Ньютона — это применение степенных рядов к исследованию движения, т. е. функций и отображений, как мы бы сейчас сказали. У Лейбница, как мы видели, анализ был более формальным алгебраическим учением о дифференциальных кольцах.

Вот несколько деталей этого спора, показывающих ясно, что не следует вообще вести подобные споры, потому что такие замечательные люди и великие математики, как Ньютон, Лейбниц, Иоганн Бернулли, выступают здесь в каком-то ужасном виде.

В этой истории, например, фигурирует анонимное письмо. Это письмо, опубликованное Лейбницем без подписи в «Журнале ученых», написал Иоганн Бернулли, ученик Лейбница. В нем он защищает Лейбница и нападает на Ньютона. Но через год Ньютон и его ученики, отвечая на это письмо, называют его письмом Бернулли. Бернулли, увидев, что ему не удалось сохранить инкогнито, укорял Лейбница в том, что тот ссорит его с Ньютоном, который только что провел Бернулли в английскую академию, а в будущем обещал выбрать и сына. «Я удивляюсь,— писал Иоганн Бернулли Лейбницу,— как Ньютон мог узнать, что письмо написал я, поскольку об этом не знал ни один смертный, кроме Вас, которому я его послал, и меня, который его написал». Но через некоторое время загадку удалось распутать. В одном месте письма проскользнуло выражение «meam formulam», т. е. ссылка на «мою формулу». Так как упомянутая формула принадлежала Иоганну Бернулли, Ньютон без труда установил автора письма.

Лейбниц написал письмо принцессе Каролине, жене принца Уэллского, который в будущем должен был стать королем, где предостерегал ее, чтобы она «не позволила этому безбожнику Ньютону смутить свою простодушную немецкую веру». В те времена (а было это около 1715 года) это было опасное обвинение для Ньютона, который занимал тогда высокий государственный пост — он был директором монетного двора. Государственный чиновник, обвиненный в безбожии, мог многим поплатиться. К счастью для Ньютона, этого в данном случае не произошло(19).

рии. Мы уже видели некоторые способы возникновения кривых. Другие способы были найдены Гюйгенсом, который исследовал ряд задач анализа, оптики и механики. Например, за 11 лет до первых публикаций Лейбница по анализу и за 13 лет до появления «законов Ньютона» Гюйгенс опубликовал свое вычисление центробежной силы при движении по окружности (т. е. дважды продифференцировал вектор-функцию и использовал «второй закон Ньютона»).

Гюйгенс решал все задачи при помощи элементарных геометрических построений, но при этом добивался значительных результатов.

Одним из важных достижений Гюйгенса было исследование введенных им эвольвент. Эвольвенты присутствовали во многих старых учебниках анализа, начиная от

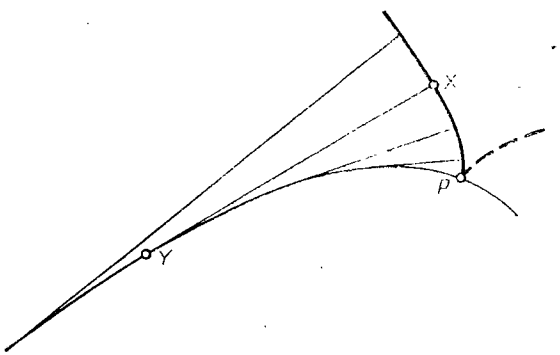

Рис. 10. Образование эвольвенты при помощи нити

первого учебника Лопиталя и приблизительно до Гурса, но в современных курсах имеется тенденция о них умалчивать.

Пусть дана кривая. Ее *эвольвента* — это траектория, которую описывает конец натянутой нити, сматываемой с нашей кривой (рис. 10). Замечательным свойством эвольвенты является то, что у нее имеется острие в точке P, и, пытаясь описать ее в окрестности этой точки с помощью ряда Тейлора, мы убеждаемся, что она в этом месте не гладкая, хотя и кажется нам таковой (и, более того, имеет касательные во всех точках). Негладкость следует из того, что радиус кривизны в точке X эвольвенты равен длине свободного конца нити YX, а так как нить становится все короче по мере приближения точки X к P, то кривизна в точке P оказывается бесконечной, а сама точка, сле-

довательно, особой. Оказывается, в этой точке эвольвента имеет особенность типа 3/2, т. е. в окрестности точки P она диффеоморфна полукубической параболе $y = x^{3/2}$. Почему на рисунке эвольвента изображена с двумя ветвями? Во-первых, записав уравнение полукубической параболы в виде $y^2 = x^3$, мы увидим и у нее вторую ветвь, а во-вторых, это можно понять, если посмотреть на эту картину с точки зрения современной геометрии.

Предположим, что наша кривая выпукла, и пусть s — натуральный параметр вдоль нее (т. е. длина кривой), $\vec{r}(s)$ — радиус-вектор точки Y кривой, соответствующей значению параметра s, а t — длина свободного участка нити. Тогда радиус-вектор точки X эвольвенты, получающейся, когда нить отрывается от кривой в точке Y, равен $\vec{r}(s) + \overrightarrow{YX} = \vec{r}(s) + t\vec{r}'(s)$, так как s — это длина вдоль кривой. Мы, таким образом, получаем отображение F плоскости с координатами (s, t) на плоскость, в которой лежит наша кривая. Легко видеть, что это отображение гладкое, но диффеоморфизмом оно не является. Несложный анализ отображения F показывает, что образом его является часть плоскости, лежащая по одну сторону от

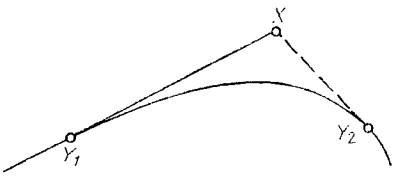

Рис. 11. Построение двух прообразов точки X

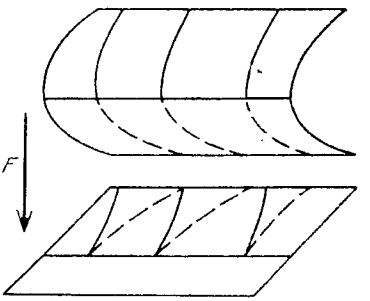

Рис. 12. Образование эвольвент при складывании

кривой, причем все точки образа, не принадлежащие кривой, имеют ровно два прообраза (см. рис. 11), а у каждой из точек кривой прообраз только один. Поэтому отображение F устроено как отображение проектирования на плоскость поверхности, сложенной над нашей кривой (рис. 12). Такое отображение называется отображением складывания.

Теперь видно, откуда берется эвольвента. Она возникает, если фиксирована длина нити, т. е. сумма $s + t$. Урав-

нение $s + t = a$ определяет на плоскости (s, t) семейство параллельных прямых, которое превращается в некоторое гладкое семейство линий на складываемой поверхности и после проектирования дает семейство кривых внизу. Каждая эвольвента соответствует какому-то значению длины a и поэтому лежит целиком на одной из этих кривых. Но каждая из таких кривых имеет две ветви. Одна ветвь соответствует верхней части линии на поверхности, а другая — ее нижней части. Поэтому-то у эвольвенты и нарисована вторая ветвь, которая соответствует нижней части. Это две части одной кривой, и вторая является

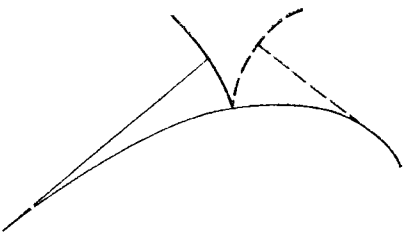

Рис. 13. Образование обеих ветвей эвольвент при помощи пити

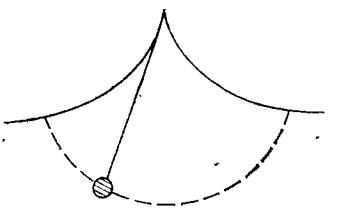

Рис. 14. Изохронный маятник Гюйгенса

аналитическим продолжением первой, соответствующим отрицательным значениям параметра t (физически это означает, что нить теперь сматывается по другому; рис. 13).

Наличие у эвольвент замечательных особых точек открыл Гюйгенс. Он очень хорошо использовал эти замечательные точки при создании изохронного маятника. Если маятник, подвешенный на нити, заставить колебаться между щечками, сделанными в форме циклоиды (рис. 14), то он будет двигаться по эвольвенте циклоиды (которая тоже является циклоидой) и все его колебания (т. е. не только малые, но и большие) будут иметь один и тот же период.

§ 14. Волновые фронты Гюйгенса

Эвольвенты связаны с объектом, встречающимся в другом исследовании Гюйгенса, а именно в теории волновых фронтов. Гюйгенс, рассматривая распространение волн, испускаемых каким-то источником, обнаружил, что и здесь тоже могут возникнуть особенности.

Пусть, например, источник имеет форму эллипса и волны распространяются внутрь эллипса с единичной ско-

ростью. По принципу Гюйгенса, через время t волновой фронт будет огибающей семейства окружностей радиуса t с центрами на эллипсе и при небольших t будет эквидистантой эллипса. Если t будет возрастать, то в некоторый момент на огибающей появятся особенности (рис. 15). Они тоже будут полукубического типа. Особые точки были очень важны для Гюйгенса при исследовании соответствия между волнами и объектами, которые мы теперь относим к вариационному исчислению, оптимизации, гамильтоновой механике . . . Поэтому в его работах

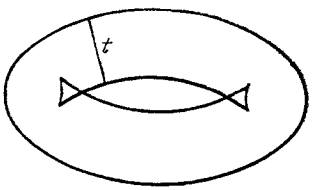

Рис. 15. Особенности волнового фронта

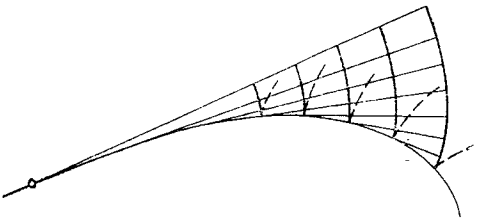

Рис. 16. Эвольвенты как волновые фронты

и по теории волн, и по теории маятника, выполненных еще в 50-х годах XVII века, содержится много подобных рисунков с исследованием всех возникающих там особенностей.

Рассмотрим на плоскости область, ограниченную некоторой кривой, и пусть в одной из точек кривой помещен источник возмущения (рис. 16). Тогда фронты, состоящие из точек, до которых возмущение может дойти за какое-то определенное время, огибая препятствие, ограниченное кривой, будут вблизи границы препятствия эвольвентами этой кривой. Таким образом, *эвольвенты кривой, ограничивающей какую-то область, можно рассматривать как гюйгенсовы волновые фронты на многообразии с краем.* Такой фронт, хотя это и кажется на первый взгляд удивительным, имеет особенность типа 3/2 в точках кривой (и, следовательно, после аналитического продолжения у него появится вторая ветвь).

§ 15. Эвольвенты и икосаэдр

Дальнейшее продолжение этих исследований приводит к изучению особенностей в трехмерном пространстве или особенностей на плоскости, но в более сложной ситуации.

Получающиеся при этом кривые и поверхности оказываются тоже весьма замечательными. Многие из них изучались во времена Гюйгенса или чуть позднее. Например, знаменитая каустика была введена Чирнгаузеном ненамного позже работ Гюйгенса, а волновые фронты и связанные с ними семейства эвольвент присутствуют уже в первом учебнике анализа, написанном Лопиталем по лекциям Бернулли.

В этой книге разобран, в частности, следующий случай. Предположим, что на плоскости задана кривая общего положения. У такой кривой может быть точка перегиба, но только простейшая (третья производная соответствующей функции отлична от нуля, так как вторая и третья производная не могут одновременно обратиться в нуль для функции общего положения). Нужно выяснить, как будет выглядеть семейство эвольвент такой кривой.

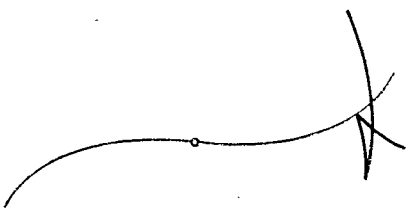

Рис. 17. Эвольвента кубической параболы

Насколько я понимаю, для математиков тех времен — Барроу, Ньютона, Лейбница, Бернулли и даже для его ученика Лопиталя — эта задача была вполне посильна. Конечно, она для них представляла некоторые трудности, но не столь большие, как для современных математиков. Я думаю, что большинство современных студентов, изучающих анализ, даже отличников, построить эвольвенту кубической параболы $y = x^3$ вообще не в состоянии. Ответ в этой задаче весьма замечательный (рис. 17). Как и прежде, эвольвента имеет особенность типа 3/2 на самой кривой, но, кроме того, у нее есть особенность типа 5/2 на касательной, проведенной через точку перегиба. Если менять длину нити, то получится семейство линий, особенности которых заполняют две кривые — саму кубическую параболу и касательную перегиба (рис. 18). Эту картинку Беннекен (1) и обнаружил в учебнике Лопиталя «Основы анализа».

Хотя эта картинка и присутствует в старых работах, обнаружить ее смогли только потому, что ее нарисовали современные математики, занимавшиеся другой задачей, правда, тоже связанной с эвольвентами. В современной математике было обнаружено, что встречающиеся здесь

особенности связаны с группами, порожденными отражениями. В частности, наша картинка связана с группой H_3. Это — группа симметрий икосаэдра, которая порождена отражениями относительно его 15 плоскостей симметрии (21).

Появление правильных многогранников часто бывает неожиданным.

Еще Кеплер, изучая движение планет, наряду с известными сейчас тремя законами, сформулировал четвертый, мистический закон, утверждающий, что большие полуоси орбит вычисляются через правильные многогранники. С тех пор правильные многогранники появлялись

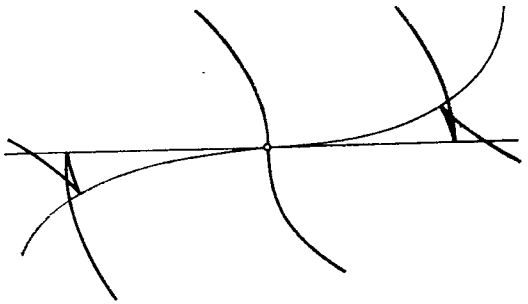

Рис. 18. Семейство эвольвент вблизи точки перегиба кривой

столь же неожиданно и в других случаях, где, однако, они более связаны с существом дела.

У группы симметрий икосаэдра можно рассмотреть так называемый *дискриминант*. Вот как он получается. Пространство $\mathbb{R}^3$ комплексифицируется и превращается в $\mathbb{C}^3$ — комплексное трехмерное пространство, где тоже действует группа H_3. Фактор-пространство $\mathbb{C}^3$ по этой группе снова изоморфно пространству $\mathbb{C}^3$ (это немедленно следует из аналога основной теоремы о симметрических многочленах, которая, кстати, тоже исчезла из курса алгебры). Таким образом, здесь имеются три базисных инварианта, через которые все инвариантные многочлены этой группы выражаются полиномиально (22). С другой стороны, в исходном $\mathbb{C}^3$ находятся зеркала, относительно которых производятся отражения (числом 15). Число образов у точки, не лежащей ни на одном из зеркал, равно порядку группы, т. е. 120. Для точки на зеркале число образов будет меньше. Точка фактор-пространства — орбита этой группы в исходном трехмерном пространстве — называется *регулярной*, если точки, из которых она со-

стоит, не лежат на зеркалах. Остальные орбиты и соответствующие им точки фактор-пространства называются нерегулярными. Множество всех нерегулярных орбит — образ одного зеркала при отображении факторизации — является подмногообразием в фактор-пространстве. Пересечением этого подмногообразия с множеством вещественных точек будет некоторое многообразие с особенностями, которое и называется дискриминантом группы H_3.

Точно так же по любой другой группе, порожденной отражениями, можно построить некоторое многообразие с особенностями.

Вот пример, когда все это можно увидеть явно. Рассмотрим на плоскости три прямые под углами 120° друг к другу (рис. 19). Группа, порожденная отражениями относительно этих прямых, содержит шесть элементов, а регулярная орбита состоит из шести точек. Все это можно

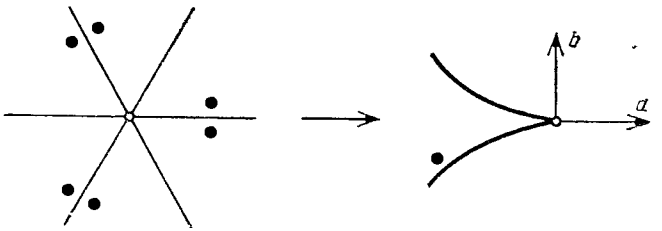

Рис. 19. Группа отражений, ее зеркала, орбита и дискримипант

представить себе так. Реализуем нашу плоскость как плоскость в трехмерном пространстве с координатами z_1, z_2, z_3, заданную уравнением $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. В этом трехмерном пространстве действует группа перестановок из трех элементов, переставляющая оси координат. Эта группа порождена отражениями в зеркалах $z_i = z_j$, следы которых на нашей плоскости и есть исходные три прямые. Поэтому орбиты на плоскости — это просто тройки чисел с нулевой суммой, рассматриваемые с точностью до перестановок. Регулярные орбиты — это тройки, все три числа в которых различны. Каким же естественным способом можно параметризовать такие неупорядоченные тройки чисел (комплексных, так как полагается сделать комплексификацию), дающих в сумме нуль? Этот способ хорошо известен, так как неупорядоченный набор из трех чисел однозначно определяется как множество корней кубического уравнения $z^3 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z + \lambda_3 = 0$. Но наши числа в сумме дают нуль, поэтому $\lambda_1 = 0$, и пространство орбит этой группы, порожденной отражениями, взаим-

но однозначно параметризуется кубическими уравнениями вида $z^3 + az + b = 0$. То есть фактор-пространство — это просто плоскость с координатами (a, b). Каждой точке этой плоскости соответствует кубический многочлен, а каждому многочлену — три его корня, среди которых могут оказаться равные. Если у многочлена есть совпадающие корни, то соответствующая ему орбита будет нерегулярной. Таким образом, уравнение дискриминанта этой группы в пространстве $\mathbb{C}^2$ мы получим, приравняв нулю дискриминант кубического многочлена с коэффициентами a, b. Итак, дискриминант в данном случае — это кривая $4a^3 + 27b^2 = 0$, т. е. полукубическая парабола. Именно эта группа, порожденная отражениями, соответствует всем тем полукубическим особенностям, которые встречались у Гюйгенса.

Для дискриминантов других групп, порожденных отражениями, тоже существуют аналогичные конструкции. Итак, для группы, порожденной отражениями в плоскостях симметрий икосаэдра, получается некоторая поверхность в трехмерном пространстве. Теорема, которую можно по этому поводу доказать, состоит в том, что эта поверхность диффеоморфна поверхности, изображенной у Лопиталя (19). Если особенности эвольвент в окрестности точек выпуклости кривой — это особенности типа 3/2, по точкам перегиба соответствует особенность, устроенная как пространство нерегулярных орбит группы икосаэдра.

Чтобы из семейства эвольвент кубической параболы получить поверхность в трехмерном пространстве, нужно все эти эвольвенты поместить в $\mathbb{R}^3$ в разных горизонтальных плоскостях, а именно эвольвенту, соответствующую значению параметра a, поднять на высоту a. Рис. 18 можно поэтому трактовать как изображение поверхности, и теорема утверждает, что *эта поверхность диффеоморфна дискриминанту группы симметрий икосаэдра* H_3.

§ 16. Икосаэдр и квазикристаллы

Теория групп, порожденных отражениями, связана с кристаллографией. А именно некоторые из этих групп сохраняют кристаллическую решетку. Например, рассмотренная выше группа, порожденная отражениями относительно трех прямых на плоскости, сохраняет шестиугольную решетку (рис. 20). Все кристаллографические группы расклассифицированы, и все про них хорошо из-

вестно. Они соответствуют простым алгебрам Ли (и, следовательно, простым группам Ли). Однако группа икосаэдра в эту классификацию не попадает, так как она не сохраняет никакой решетки в трехмерном пространстве. Точно так же не попадает под эту классификацию и группа пятиугольника. Это отражает тот факт, что правильные пятиугольники в кристаллах не встречаются и не бывает орнаментов с симметрией пятого порядка, которыми можно было бы заполнить плоскость.

Между тем в последние несколько лет физики-экспериментаторы, занимающиеся рентгеноструктурным анализом кристаллов, стали обнаруживать на рентгенограммах пятиугольники в довольно больших количествах (23). Иными словами, были обнаружены вещества, имеющие, по-видимому, пятиутольную симметрию. Они были названы квазикристаллами, в память о математической теореме, утверждающей, что настоящими кристаллами они являться не могут.

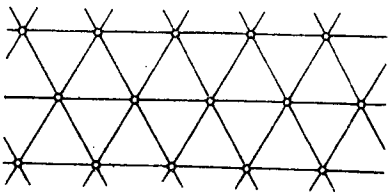

Рис. 20. Шестиугольная кристаллическая решетка

Как же все это объясняется? Оказывается, что в теории, о которой сейчас шла речь,— в теории особенностей, связанных с эвольвентами, существует конструкция, которая тоже приводит к подобным квазикристаллам.

Рассмотрим для наглядности не группу икосаэдра, а более простую группу симметрий пятиугольника. Хорошо известно, что эту группу нельзя реализовать как группу симметрий, сохраняющих некоторую решетку на плоскости. Рассмотрим, тем не менее, пятимерное пространство, в котором, точно так же как в рассмотренном выше примере, действует группа перестановок координат из 120 элементов. Эта группа, очевидно, сохраняет целочисленную пятимерную решетку. (В теории групп, порожденных отражениями, она известна как группа A_4.)

Вложенная в группу перестановок группа пятиугольника тогда тоже действует в пятимерном пространстве, но это представление приводимо. Действительно, вращения плоскости, переводящие правильный пятиугольник в себя, имеют собственными числами корни пятой степени из единицы. Корни сами расположены в вершинах правильного пятиугольника, и, объединяя в пары комплекс-

но сопряженные корни, мы получим, что пространство $\mathbb{R}^5$ распадается в сумму трех инвариантных подпространств — одномерного, соответствующего корню 1, и двух двумерных. Одномерное пространство — это диагональ — подпространство векторов, все пять координат которых равны между собой. В ортогональном дополнении к диагонали по-прежнему действует группа пятиугольника, и по-прежнему там имеется решетка, которую она сохраняет. Но в двумерных инвариантных пространствах решеток уже нет. Как показывают несложные вычисления, каждое из двумерных инвариантных подпространств лежит по отношению к решетке в $\mathbb{R}^4$ иррациональным образом, т. е. не содержит кроме нуля ни одной целой точки (это следует из иррациональности золотого сечения).

Пусть теперь в объемлющем пространстве имеется функция с симметрией решетки (периодическая, т. е. инвариантная относительно сдвигов на векторы решетки и вдобавок переходящая в себя при действии всех движений и отражений, переводящих решетку в себя). Ограничение этой функции на инвариантное двумерное подпространство не будет уже периодической функцией, но будет функцией почти периодической. Эта почти периодическая функция сохраняет остатки симметрии пятиугольника. Обнаружить их можно следующим образом (24).

Разложим полученную почти периодическую функцию на плоскости в ряд типа Фурье, $f(x) = \sum f_k e^{i(k, x)}$. Волновые векторы k («номера» гармоник Фурье) пробегают некоторое множество векторов двойственной плоскости. Это множество называется спектром почти периодической функции. В спектре сохраняются следы пятиугольной симметрии исходной периодической функции, заданной в объемлющем (четырехмерном или пятимерном) пространстве.

А именно рассмотрим сначала спектр этой исходной периодической функции. Этот спектр, вообще говоря, представляет собой обычную решетку, двойственную исходной решетке в объемлющем пространстве.

Каждому двумерному подпространству любого пространства отвечает двумерное фактор-пространство сопряженного пространства. Оно получается факторизацией по пространству линейных форм, равных нулю на изучаемом двумерном подпространстве.

Иными словами, пространство волновых векторов для изучаемой двумерной плоскости получается из большого пространства волновых векторов объемлющего простран-

ства при естественном проектировании вдоль некоторого его подпространства коразмерности два.

В этом большом пространстве волновых векторов объемлющего пространства лежит решетка гармоник Фурье исходной периодической функции, заданной в объемлющем пространстве. Спектр почти периодической функции получается из этой многомерной решетки при описанном выше естественном проектировании сопряженных пространств (двойственном вложению плоскости в объемлющее пространство).

Ввиду «иррационального» расположения двумерной плоскости по отношению к решетке периодов объемлющего пространства, проекция многомерной решетки гармоник будет всюду плотным множеством на плоскости волновых векторов. Таким образом, спектр получающейся при ограничении на плоскость почти периодической функции будет, вообще говоря, всюду плотным множеством на плоскости волновых векторов. На первый взгляд из него трудно извлечь какую-либо информацию о симметриях.

Обратим теперь внимание на коэффициенты ряда Фурье. У исходной периодической функции в объемлющем пространстве (которую мы считаем гладкой) коэффициенты Фурье быстро убывают по мере удаления волнового вектора от нуля. Поэтому заметную величину имеет только конечное число коэффициентов Фурье, отвечающих гармоникам с небольшими номерами.

Следовательно, и у получающейся ограничением почти периодической функции на плоскости заметную величину имеет только конечное число гармоник. Соответствующие точки спектра образуют конечное множество. Оно является проекцией на плоскость конечного облака близких к нулю точек многомерной решетки. Эта проекция сохраняет следы пятиугольной симметрии многомерной решетки в виде бросающихся в глаза (хотя и не совсем правильных) пятиугольников (рис. 21).

Аналогичное разложение существует и для представления группы симметрий икосаэдра (25).

Именно это разложение объясняет связь между икосаэдром и эвольвентами Гюйгенса, так что его открытие можно рассматривать как завершение начатых Гюйгенсом исследований.

С другой стороны, при рентгеноструктурном анализе кристаллов наблюдается, в сущности, спектр функции, имеющей симметрию кристаллической решетки (точнее — проекция этого трехмерного спектра на плоскость). Точки

спектра выглядят, как блики (яркие пятна) на рентгенограмме, причем яркость тем выше, чем больше амплитуда соответствующей гармоники. Поэтому практически наблюдается не весь спектр, а лишь его часть, соответствующая гармоникам с не слишком большими номерами.

И вот при анализе этих изображений для некоторых веществ были замечены регулярные структуры из приблизительно правильных пятиугольников (рис. 21). (23)

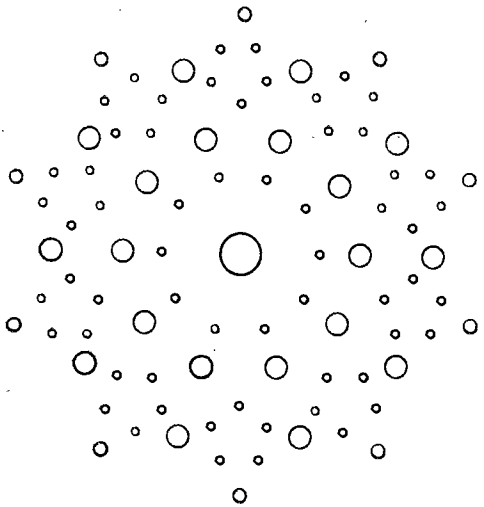

Рис. 21. Квазикристаллический спектр

Теория, построенная для объяснения связи между икосаэдром и эвольвентами, сразу же объясняет, как может получиться такой спектр. Изучаемая функция в трехмерном пространстве должна быть не периодической, а почти периодической. А именно она должна получаться из периодической функции шести переменных, допускающей симметрии икосаэдра, при ограничении на «иррациональное» трехмерное пространство. Не останавливаясь здесь на вопросе о физическом смысле трех дополнительных «квантовых» переменных, замечу только, что теории, предложенные физиками для объяснения наблюдений квазикристаллов, идейно близки к описанным выше построениям, возникшим как побочный продукт исследования особенностей эвольвент и волновых фронтов Гюйгенса,— еще один пример того удивительного единства, которое так поражало Ньютона и его современников, что они истолковывали его как доказательство существования Бога.

§ 17. Ньютон после Principia

Ни открытие системы мироздания, ни создание теоретической физики, ни построение небесной механики не входили ни в годовые планы Кембриджского университета и Королевского общества, ни в их планы на перспективу до 1700 года. 700-страничные Principia Ньютона были написаны им в течение полутора лет по настоятельной просьбе Галлея. Но, поскольку книга не была включена в план, Галлею пришлось издавать ее за свой счет.

Ньютон в это время был профессором в Тринити-колледже. У него было три студента. Он читал лекции — по арифметике, географии, оптике и другим наукам. Лекции читались только в осеннем семестре (10 лекций в год) и продолжались по полчаса. Иногда никто из слушателей не приходил (лекции Ньютона славились непонятностью), и тогда он возвращался домой.

Больше всего сил и времени Ньютон потратил на алхимию и теологию. Основные открытия Ньютона сделаны им в два студенческих года, на двадцать третьем и двадцать четвертом году жизни. После Principia (оконченных им в возрасте сорока четырех лет) Ньютон отошел от активной научной работы *).

В 1696 году Ньютон был назначен управляющим, а потом директором монетного двора в Лондоне и сыграл значительную роль в экономической реформе, проведенной его бывшим учеником, лордом Монтегю Галифаксом (основателем Английского банка, управляющим страной во время отсутствия короля).

Затянувшиеся на несколько десятилетий революционные преобразования в Англии, начавшиеся гражданской войной и закончившиеся «славной революцией» 1688 года, привели экономику страны в тяжелое положение: коррупция и другие негативные явления предшествовавших десятилетий потребовали экономической реформы, в ходе которой пришлось срочно изъять из обращения старые, неполновесные деньги, не признаваемые иностранными государствами.

Ньютон за короткое время в восемь раз увеличил чеканку монеты, не поставив ни одного нового станка. Одновременно он вел сыск и следствие и за один 1697 год пе-

*) В годы застоя в этом обвиняли А. Д. Сахарова.

редал в суд дела, по которым было казнено около 20 фальшивомонетчиков.

В 1703 году Ньютон сделался еще и президентом Королевского общества (см. стр. 39) и оставался им до своей смерти в 1727 году.

§ 18. Натуральная философия Ньютона

Среди важнейших физических принципов, содержащихся в Principia, нужно отметить: 1) идею относительности пространства и времени («в природе не существует ни покоящегося тела, . . . ни равномерного движения»), 2) гипотезу существования инерциальных систем координат, 3) принцип детерминированности: положения и скорости всех частиц мира в начальный момент определяют все их будущее и все их прошлое.

Вселенная, представлявшаяся хаотической, оказалась после Principia подобием хорошо налаженного часового механизма. Эта регулярность и простота основных принципов, из которых выводятся все сложные наблюдаемые движения, воспринимались Ньютоном (26) как доказательство Бытия Божьего: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа... Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель (παντοκρατορ)». Теоретическая физика оставалась в созданном Ньютоном раю больше двухсот лет, пока квантовая механика и общая теория относительности не разбили этих иллюзий.

Перечислить здесь хотя бы главные конкретные достижения, изложенные в Principia, невозможно. Упомяну лишь построение теории пределов (отличающееся от современного разве обозначениями), топологическое доказательство трансцендентности абелевых интегралов (лемма XXVIII), вычисление сопротивления движению в разреженной среде с большими сверхзвуковыми скоростями (нашедшее приложения лишь в эпоху космонавтики), исследование вариационной задачи о теле наименьшего сопротивления при данной длине и ширине (решение этой задачи имеет внутреннюю особенность, о которой Ньютон знал, а его издатели в XX веке, видимо, не знали и сгладили чертеж (27)), ра счет возмущений движения Луны Солнцем.

§ 19. Триумфы небесной механики

Развитие небесной механики после Ньютона представляет собой длинный ряд триумфов закона всемирного тяготения: кажущиеся отклонения от него со временем объяснялись недостаточно точным учетом возмущений. (Знаменитое исключение — прецессия перигелия Меркурия. Наблюдаемое ее значение — 599″ в столетие, учет возмущений дает 557″. Недостающие 42″ — эффект общей теории относительности. Новая физика обычно начинается с уточнения последних знаков!)

Первым триумфом теории тяготения было предсказание возвращения кометы Галлея. Галлей не открыл справедливо названную его именем комету, а подметил сходство орбит комет 1456, 1531, 1607 и 1682 годов и отважился предсказать возвращение кометы через 76 лет, т. е. на 1758 год. Но из-за возмущения Юпитером и Сатурном комета запоздала (по вычислениям Клеро, на 618 дней) и прошла перигелий лишь в марте 1759 года, почти как и было предсказано Клеро.

Другим явлением, вызывавшим сомнение в универсальности и точности закона тяготения, было медленное, но неизменно наблюдавшееся ускорение Юпитера и замедление Сатурна (Кеплер, 1625; Галлей, 1695). Если бы этот процесс продолжался бы в течение десятка миллионов лет, то он бы совершенно изменил Солнечную систему: Юпитер приблизился бы к Солнцу, а Сатурн удалился бы.

Суммарная масса планет примерно в тысячу раз меньше массы Солнца, поэтому и взаимные возмущения планет друг другом за год составляют величину порядка тысячной доли пройденного пути. Если бы эти возмущения накапливались в течение тысячелетий, планеты могли бы падать на Солнце и сталкиваться друг с другом, Земля могла бы далеко уйти от Солнца и замерзнуть.

Почему же этого не происходит? Дело в том, что возмущения, испытываемые планетами в разное время, не направлены в действительности в одну сторону, а носят колебательный характер.

Математически такие возмущения выражаются суммами слагаемых, пропорциональных $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ — периодических, неопасных возмущений. Накапливающиеся возмущения проявляются в виде растущих со временем слагаемых, пропорциональных t, или колебаний растущей амплитуды, $t \cos(\omega t + \theta)$ (рис. 22). Пропорциональные времени слагаемые называются *вековыми*, так как,

например, возмущение at, даже если коэффициент a мал (скажем, порядка одной тысячной), становится большим через несколько веков.

Таким образом, возникла проблема вековых возмущений: ввиду огромности космогонического времени

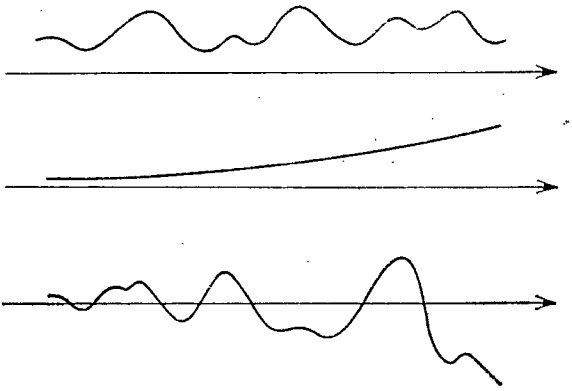

Рис. 22. Периодические, вековые и смешанные возмущения

(миллиарды лет) даже очень малые вековые возмущения кардинальным образом меняют историю Солнечной системы и, в частности, Земли.

§ 20. Теорема Лапласа об устойчивости

Вопрос состоял в том, существуют ли на самом деле вековые возмущения, или они являются артефактами — следствием неудачной математической процедуры. (Например, рассмотрим маятник, колеблющийся по закону $x = \cos \omega t$, и предположим, что мы немного возмутили частоту ω, заменив ее на $\omega + a$, где a очень мало. Тогда разложение возмущений в ряд по степеням a приведет в первом же приближении по a к выражению $x = \cos(\omega + a)\, t = \cos \omega t - at \sin \omega t \ldots$, содержащему опасный «смешанный» член с at. Между тем истинная амплитуда колебаний маятника вовсе не растет с течением времени, а остается ограниченной.)

Анализ планетных возмущений в конце концов привел Лагранжа (1776) и Лапласа (1784) к «теореме Лапласа об устойчивости Солнечной системы» (28): взаимные возмущения планет, движущихся по мало эксцентричным непересекающимся эллипсам почти в одной плоскости и в одну сторону, приводят лишь к почти что периодическим

колебаниям эксцентриситетов и наклонений вблизи нуля, в то время как расстояния до Солнца колеблются вблизи своих начальных значений.

Иными словами, большие оси кеплеровых эллипсов не имеют вековых возмущений.

«Теорема» Лапласа не была им в строгом смысле доказана, так как он представлял возмущения рядами и доказал лишь отсутствие вековых слагаемых среди первых членов ряда.

Впоследствии отсутствие вековых и смешанных слагаемых установили для всех членов ряда. Но из того, что вековых членов нет, не следует, что длины больших осей кеплеровых эллипсов вечно останутся близкими к своим начальным значениям, так как сами ряды расходятся (некоторые их члены велики). Первые члены ряда дают хорошее приближение на ограниченном отрезке времени, но не позволяют судить о поведении орбит на космогонических временах.

Что касается взаимных возмущений Юпитера и Сатурна, то они, как показал Лаплас в 1784 году, приводят лишь к долгопериодическому, а не вековому изменению эксцентриситетов орбит, с периодом примерно 900 лет. За 450 лет, в течение которых возмущение накапливается, оно успевает сдвинуть Сатурн и Юпитер меньше чем на один градус.

Очень важно, что орбиты находятся почти в одной плоскости; если бы орбита Луны повернулась на 90°, то эксцентриситет Луны под влиянием возмущений от Солнца начал бы расти так быстро, что Луна врезалась бы в Землю всего через 4 года (29).

§ 21. Падает ли Луна на Землю?

Наиболее сложной проблемой долгие годы оставалось движение Луны, так как из-за близости Луны мы можем легко заметить малейшие по величине смещения, и в разложениях приходится учитывать члены высокого порядка малости. Уже в 1693 году Галлей заметил, что при сравнении наблюдений затмений по арабским и античным источникам с современными период обращения Луны, а следовательно, и ее орбита оказались уменьшающимися («вековое ускорение» составляло 10″ в столетие).

В 1770 году Парижская академия предложила премию за исследование о том, может ли теория гравитации объяснить это явление и не приведет ли уменьшение лунной ор-

биты к падению Луны на Землю. Эйлер в конкурсном сочинении считал «твердо установленным с несомненной очевидностью, что вековые неравенства лунного движения не могут вызываться силами тяготения». Он объяснил ускорение Луны сопротивлением среды, приводящим в конце концов к катастрофе *).

Но в 1787 году Лаплас нашел объяснение: долгопериодические колебания эксцентриситета орбиты Земли под действием планетных возмущений. Период этих малых колебаний порядка нескольких десятков тысячелетий, поэтому эффект кажется вековым.

Колебания эксцентриситета орбиты Земли — один из основных факторов, вызывающих наступление ледников (эффективная широта Ленинграда летом вследствие этих колебаний меняется от широты Таймыра до широты Киева за несколько десятков тысяч лет — Миланкович, 1939).

Что же касается Луны, то объяснение Лапласа верно лишь наполовину: после учета изменений эксцентриситета орбиты Земли остается кажущееся вековое ускорение Луны (5″ в столетие), вызываемое, видимо, приливным трением (по некоторым оценкам, Берингово море дает чуть ли не половину эффекта). Под влиянием приливного трения Луна все время удаляется от Земли, а вращение Земли замедляется. Сутки удлиняются вдвое за время порядка миллиардов лет (сезонные колебания продолжительности суток вследствие перераспределения момента в атмосфере и в океане раз в сто больше, чем годовое удлинение суток вследствие приливного трения). Замедление вращения Земли и приводит к кажущемуся ускорению Луны (30).

§ 22. Задача трех тел

В то время как задача о движении двух точек решена Ньютоном, точное аналитическое решение задачи о движении хотя бы трех притягивающихся материальных точек при общих начальных условиях (задачи трех тел, поставленной еще в Principia) не только не найдено, но и в некотором смысле невозможно (31).

---

*) Теория Эйлера, по-видимому, применима не к Луне, а к Фобосу, спутнику Марса, тормозящемуся его атмосферой и оттого ускоряющемуся. Он должен бы упасть на Марс через 100 млн лет, но, скорее всего, раньше будет разорван приливными силами и превратится в кольцо.

Тем не менее уже Эйлер (32) указал несколько специальных решений, при которых взаимное расположение всех трех тел остается постоянным — тела все время расположены либо в вершинах правильного треугольника (Лагранж (33)), либо на одной прямой.

Эти решения казались чисто математическим курьезом, пока (в 1906 году и позже) на орбите Юпитера не были обнаружены «греки» и «троянцы» — две группы малых

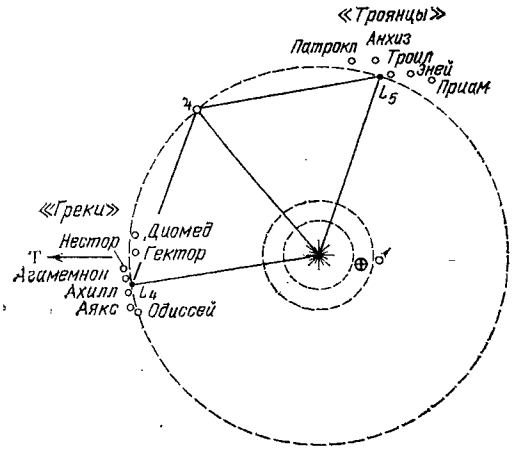

Рис. 23. «Греки» и «Троянцы»

планет, образующих с Солнцем и Юпитером два равносторонних треугольника (троянцы отстают, а греки опережают Юпитер; рис. 23).

Соответствующие треугольникам решения задачи трех тел устойчивы, по меньшей мере в линейном приближении, в то время как решения, при которых все три тела расположены на одной прямой, заведомо неустойчивы и потому до последних лет считались практически бесполезными.

Однако в эпоху космонавтики положение изменилось. Станция, помещенная в соответствующую эйлерову решению «точку либрации» между Землей и Солнцем, находится в оптимальных условиях для наблюдений Солнца. Это положение неустойчиво, подобно положению маятника «вверх ногами». Небольшие случайные отклонения станции от точки либрации с течением времени нарастают. Но, поскольку точка либрации соответствует точному решению, скорость роста возмущений вблизи нее мала. Оказывается, затраты энергии на постоянное кор-

ректирование орбиты, заставляющее станцию все время находиться вблизи точки либрации, невелики (они тем меньше, чем меньшее отклонение считается допустимым). Учет возмущающего влияния других тел не приводит, при правильном выборе корректирования, к изменению окончательного вывода (34).

Таким образом, точные решения, обнаруженные еще в XVIII веке, сейчас практически используются в космонавтике.

§ 23. Закон Тициуса — Боде и малые планеты

Во времена Ньютона Солнечная система заканчивалась Сатурном. Уран случайно открыт Гершелем 13 марта 1781 года («не обремененный традициями, которые при подготовке специалистов повсюду ограничивали сферу их обязанностей и поле допускаемой активности, он смог избрать непроторенные пути» — Паннекук, История астрономии).

Открытие Нептуна «на кончике пера» (в предсказанном Адамсом и Леверье по возмущениям Урана месте) в сентябре 1846 года явилось новым триумфом закона всемирного тяготения.

Впрочем, предсказанная орбита сильно отличалась от истинной (ее среднее расстояние от Солнца около 30 астрономических единиц вместо предсказанных 38, истинный эксцентриситет во много раз меньше предсказанного).

Некоторые исследователи считают, что открытие Нептуна на предсказанном месте — счастливая случайность: имевшиеся наблюдения возмущений Урана влекут предсказанное положение Нептуна лишь в совокупности с принятой Адамсом и Леверье неверной гипотезой о том, что радиус орбиты подчиняется «закону Боде» (открытому Тициусом).

Эмпирический закон Тициуса, публикацию которого Боде обнаружил в 1772 году, дает следующие размеры орбит: 4 (Меркурий), $4 + 3$ (Венера), $4 + 3 \cdot 2$ (Земля), $4 + 3 \cdot 4$ (Марс), $4 + 3 \cdot 8$ (?), $4 + 3 \cdot 16$ (Юпитер), $4 + 3 \cdot 32$ (Сатурн), $4 + 3 \cdot 64$ (Уран). Число 28 приходилось пропустить, так как между Марсом и Юпитером не было известно никакой планеты. Недостающую планету начали искать.

За открытием 1 января 1801 года малой планеты Цереры (диаметром около 1000 км) быстро последовали от-

крытия Паллады (600 км), Весты и Юноны. Орбиты всех этих малых планет находятся между орбитами Марса и Юпитера. В настоящее время астрономы регулярно следят за движением двух с половиной тысяч подобных тел, называемых теперь астероидами, диаметрами от сотен километров до сотен метров. Число астероидов размером d или больше растет, видимо, обратно пропорционально квадрату d. Предполагают, что полное число астероидов диаметром больше километра достигает миллиона.

Орбиты некоторых астероидов проходят близко от орбиты Земли. Другие астероиды, отклонившись при близком прохождении Юпитера или Марса, могут сильно изменить свои орбиты и также оказаться вблизи Земли.

По современным данным, столкновения Земли с астероидами крупнее полукилометра диаметрам происходят с интервалами порядка сотни тысяч лет (35).

Кратеры, образующиеся при этих столкновениях, имеют размеры порядка десятков километров (на одном из таких кратеров стоит Калуга), а иногда и сотен километров (близ устья р. Попигай на севере Сибири). Особенно крупный астероид может пробить кору Земли (Уипл предполагает, что так образовалась Исландия).

Вероятность столкновения с 20-километровым астероидом Эрос (скорость встречи 14 км/с) в течение ближайших 400 миллионов лет составляет, по современным оценкам, около 1/5, диаметр образующегося кратера — около 250 км.

Последствия столкновения с большим астероидом подобны последствиям ядерной войны: атмосфера практически не уменьшает скорости астероида, и вся его кинетическая энергия мгновенно выделяется при ударе о Землю.

Особенно сильные столкновения могут иметь экологическое значение и влиять на вымирание видов на отдельных континентах и даже на всей планете. Таким образом, эффект от столкновения с астероидом сравним с результатами деятельности человечества и не угрожает целостности земного шара.

§ 24. Люки и резонансы

Периоды обращения большинства астероидов вокруг Солнца заключены между периодами обращения Марса и Юпитера, но заполняют это интервал крайне неравномерно. В 1887 году Кирквуд открыл «люки» (рис. 24) —

интервалы на оси периодов, свободные от периодов астероидов. Люки соответствуют резонансам (соизмеримости периодов): один из люков находится вблизи половины периода Юпитера, другой вблизи 2/3, имеются люки, отвечающие резонансам 2/5, 3/5 и т. д.,— чем выше порядок резонанса, тем уже люк.

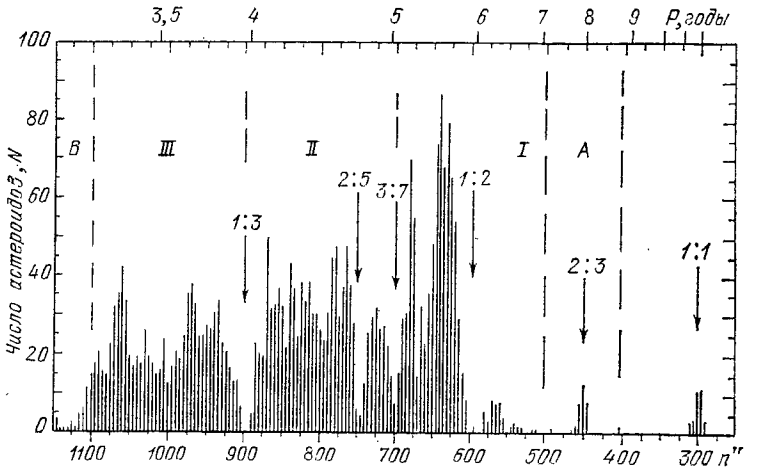

Рис. 24. Люки Кирквуда

Аналогичные люкам щели имеются в кольце Сатурна. Самая большая щель между кольцами *A* и *B* была замечена еще Кассини в XVII веке. На сделанных Вояджером-2 фотографиях (**36**) кольца *B* Сатурна (рис. 25) ясно видна тонкая структура: кольцо шириной 30 000 км состоит из ряда более тонких колец, разделенных широкими щелями, каждое из тонких колец более узкими щелями разделено на еще более тонкие колечки и т. д. до колец, ширина которых, видимо, сравнима с толщиной — порядка километра.

Щели в кольце Сатурна соответствуют резонансам с его спутниками. Несколько лет назад при наблюдении с самолета покрытия звезды Ураном случайно были обнаружены его кольца. Анализ их резонансной структуры позволил советским астрономам Н. Н. Горькавому и А. М. Фридману (**37**) предсказать целую серию спутников Урана. Через полгода при пролете Вояджера-2 вблизи Урана 24 января 1986 года все эти спутники были обнаружены на предсказанных расстояниях от Урана — еще один триумф теории тяготения Ньютона.

В руках Эйлера, Лагранжа и Лапласа математические методы Ньютона получили огромное техническое развитие, и ко времени Леверье уже было достигнуто прекрасное согласие теории с наблюдениями. Но в идейном отношении все эти сложные вычисления оставались вариантами теории возмущений, созданной Ньютоном.

Рис. 25. Кольцо *B* Сатурна (участок около 6000 км, т. е. четверть ширины кольца *B*)

Двухсотлетний промежуток от гениальных открытий Гюйгенса и Ньютона до геометризации математики Риманом и Пуанкаре кажется математической пустыней, заполненной одними лишь вычислениями.

Пуанкаре, основатель топологии и современной теории динамических систем, поставил вопрос по-новому. Вместо отыскания формул, выражающих изменение положений небесных тел с течением времени, он задался вопросом о качественном поведении орбит: сближаются ли планеты, могут ли они падать на Солнце или уходить далеко от него и т. д. «Теорема» Лапласа не дает ответа на эти вопросы, относящиеся к бесконечному промежутку времени, поскольку его ряды, как установил Пуанкаре, расходятся.

С «Новых методов небесной механики» и «Analysis situs» (топологии) Пуанкаре (38) начинается новая —

качественная — математика, о применениях которой в небесной механике здесь можно сказать только несколько слов.

Оказалось, что в зависимости от начальных условий, движение в системе трех и более тел иногда регулярно, а иногда хаотично. Примером регулярного движения является планетное движение по эволюционирующему кеплерову эллипсу, медленно и мало меняющему свой эксцентриситет в течение бесконечного времени и медленно вращающемуся под действием возмущений, вечно оставаясь в слегка покачивающейся около неизменного положения плоскости, как предписывает приближенная теория Лапласа.

Примером хаотического движения является движение астероида вблизи люка Кирквуда (А. И. Нейштадт, Дж. Л. Теннисон и др. (39)) — резонансное взаимодействие с Юпитером проводит к «случайным», хаотическим изменениям эксцентриситета то в ту, то в другую сторону. Последовательные «скачки» эксцентриситета слабо зависимы. По законам теории вероятностей хаотически меняющийся эксцентриситет иногда становится большим, и тогда астероид может, например, упасть на Марс. Предполагается, что именно такой механизм «выметания» астероидов из люков Кирквуда привел за сотни миллионов лет к образованию люков (Висдом (39)). Хаотически меняется и орбита кометы Галлея (Б. В. Чириков, В. В. Вячеславов (40)).

Начальные условия регулярных и хаотических движений перемежаются (рис. 26) подобно рациональным и иррациональным числам (с той разницей, что вероятности как регулярного, так и хаотического поведения положительны, а вероятность того, что случайно выбранное число рационально, равна нулю). Таким образом, даже если движение планеты или астероида регулярно, достаточно сколь угодно малого возмущения начального состояния, чтобы сделать его хаотичным. К счастью, однако, скорость развития таких хаотических возмущений крайне мала, так что время, через которое скажется хаотичность, при достаточно малом возмущении начального состояния будет велико по сравнению с временем существования Солнечной системы (Н. Н. Нехорошев (41)). Так что за ближайший миллиард лет Солнечная система вряд ли существенно изменится и описанный Ньютоном «часовой механизм» будет продолжать исправно работать.

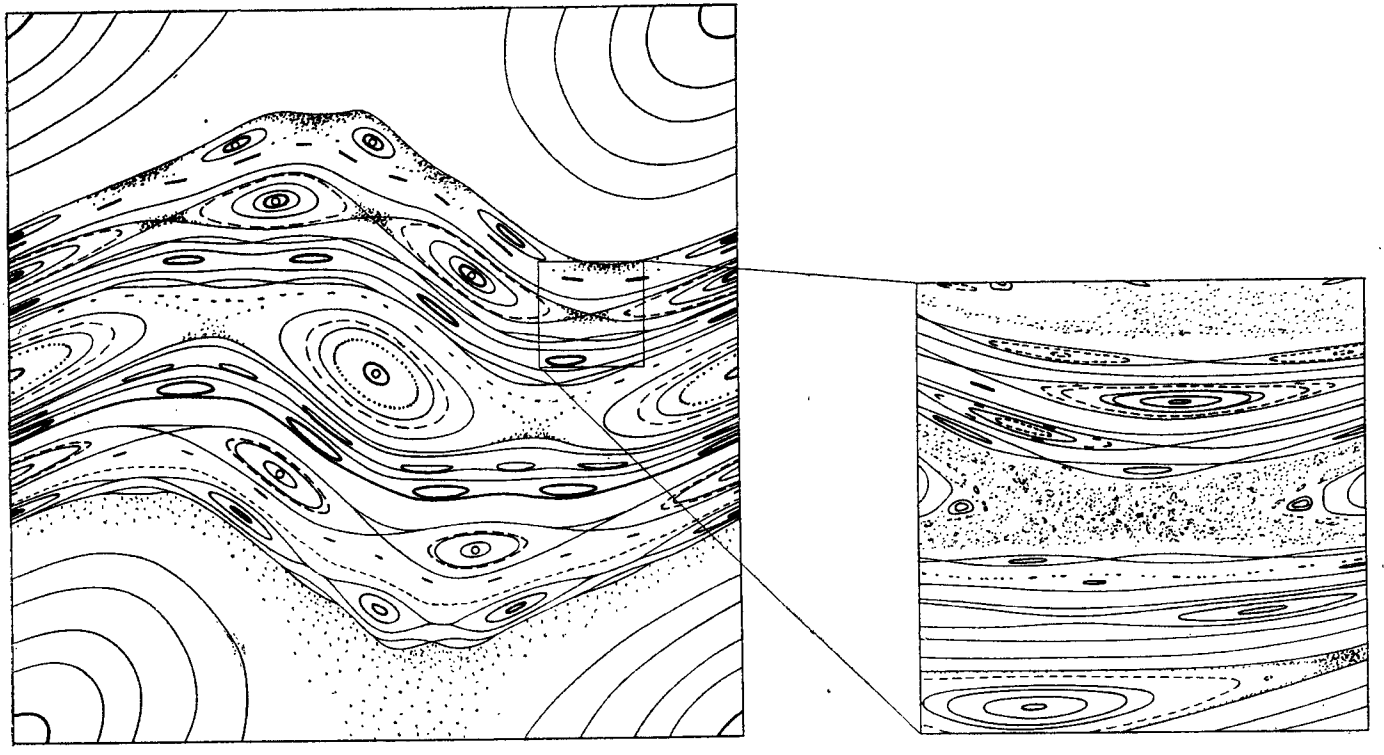

Рис. 26. Регулярные и хаотические орбиты

§ 25. Теорема Ньютона о трансцендентности интегралов

В Principia есть две чисто математические страницы, содержащие удивительно современное топологическое доказательство замечательной теоремы о трансцендентности абелевых интегралов (42).

Затерянная среди небесно-механических исследований, эта теорема Ньютона почти не обратила на себя внимания математиков. Возможно, это произошло потому, что топологические рассуждения Ньютона обогнали уровень науки его времени на пару сотен лет. Доказательство Ньютона в сущности основано на исследовании некоторого эквивалента римановых поверхностей алгебраических кривых, поэтому оно непонятно как с точки зрения его современников, так и для воспитанных на теории множеств

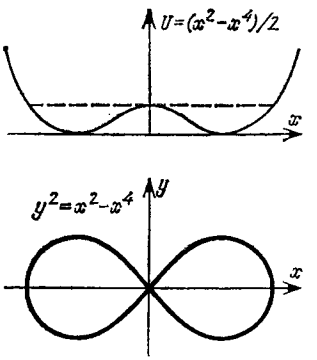

Рис. 27. Лемниската (не Бернулли) — алгебраическая кривая $y^2 = x^2 - x^4$ — линия уровня энергии на фазовой плоскости частицы, движущейся в силовом поле с двумя симметричными потенциальными ямами

и теории функций действительного переменного математиков двадцатого века, боящихся многозначных функций. К тому же Ньютон очень краток и не объясняет очевидные для него, но вошедшие в общематематический обиход много позже факты. Вдобавок, доказав теорему, он сообщает напоследок и об известных ему контрпримерах к ней.

Кривая на плоскости называется *алгебраической*, если она удовлетворяет уравнению $P(x, y) = 0$, где P — ненулевой многочлен. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ — алгебраическая кривая. Алгебраическими кривыми являются эллипсы, гиперболы, лемниската (не Бернулли) $y^2 = x^2 - x^4$ (рис. 27). Синусоида — не алгебраическая кривая (почему?).

Функция называется алгебраической, если ее график—алгебраическая кривая. Например, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ —двузначная алгебраическая функция.

Рассмотрим алгебраический овал (замкнутую выпуклую алгебраическую кривую).

О п р е д е л е н и е. Овал называется *алгебраически квадрируемым*, если площадь любого его сегмента выражается алгебраически.

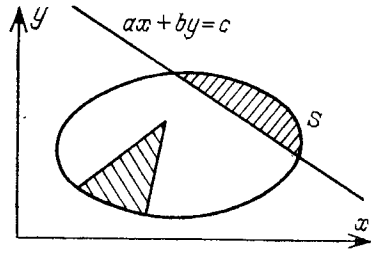

Рис. 28. Площадь S как функция от (a, b, c) неалгебраична

Иными словами, площадь S сегмента, отсекаемого прямой $ax + by = c$ (рис. 28), должна быть алгебраической функцией от прямой, т. е. должна удовлетворять алгебраическому уравнению $P(S; a, b, c)$, где P — ненулевой многочлен.

З а м е ч а н и е. Если овал алгебраически квадрируем, то и площадь сектора, отсекаемого от него углом с лежащей внутри овала вершиной, является алгебраической функцией от прямых, образующих угол. Ибо площадь треугольника, отличающего сектор от сегмента, алгебраична (подробности см. ниже в § 29).

Ньютон поставил себе целью найти все алгебраически квадрируемые овалы. Его результат таков:

Т е о р е м а. *Всякий алгебраически квадрируемый овал имеет особые точки: все гладкие овалы алгебраически не квадрируемы.*

П р и м е р. Эллипс алгебраически не квадрируем. Отсюда следует, что уравнение Кеплера, определяющее положение планеты на кеплеровом эллипсе как функцию времени (в соответствии со вторым законом Кеплера, по которому площадь, заметенная радиус-вектором, пропорциональна времени), — трансцендентное и не может быть решено в алгебраических функциях.

Этот пример и привел Ньютона к его общей теореме. Удивительна теорема потому, что на первый взгляд между алгебраической квадрируемостью и особыми точками не видно никакой связи.

З а м е ч а н и е. В современных обозначениях уравнение Кеплера имеет вид $x - e\sin x = t$. Это уравнение сыграло большую роль в истории математики. Со времен Ньютона решение x искали в виде ряда по степеням эксцентриситета e. Ряд сходится при $|e| \leqslant 0{,}6627434\ldots$

Исследование происхождения этой загадочной константы привело Коши к созданию комплексного анализа.

Такие фундаментальные математические понятия и результаты как функции Бесселя, ряды Фурье, топологический индекс векторного поля и «принцип аргумента» теории функций комплексного переменного также впервые появились при исследовании уравнения Кеплера.

Доказательство теоремы Ньютона. Выберем точку O внутри овала и будем поворачивать выходящий из нее луч. Если овал алгебраически квадрируем, то площадь, заметаемая радиус-вектором точки

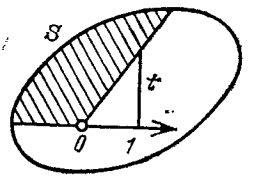

Рис. 29. Заметенная радиус-вектором площадь как функция от t не алгебраична

овала (рис. 29) должна быть алгебраической функцией от тангенса t угла наклона луча к оси x.

Заставим луч обегать овал снова и снова. При каждом обороте заметенная площадь будет увеличиваться на всю величину площади, ограниченной овалом. Следовательно, заметенная площадь, рассматриваемая как многозначная функция от t, имеет для одного и того же положения луча бесконечно много различных значений.

Но алгебраическая функция не может быть бесконечно многозначной, так как число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Следовательно, заметенная площадь — не алгебраическая функция, а потому овал алгебраически не квадрируем.

Ньютон замечает, что такое же рассуждение доказывает и неалгебраичность длины дуги овала.

§ 26. Глобальная и локальная алгебраичность

Итак, алгебраически квадрируемые овалы не существуют? Нет, Ньютону уже были известны примеры овалов, площади сегментов которых выражаются алгебраически, и он упоминает о них при обсуждении своей теоремы в Principia.

Простейший пример доставляет овал рис. 30, $y^2 = x^2 - x^3$. Обозначим через t тангенс угла наклона секущей, $y = tx$. Тогда $t^2 = 1 - x$, откуда получается параметрическое представление овала,

$$x = 1 - t^2,$$
$$y = t - t^3.$$

Из этого представления видно, что интеграл площади $\int y dx$ — многочлен относительно t. Поэтому площадь любого сегмента, отсекаемого от этого овала прямой, вычисляется алгебраически.

Хотя построенный овал не гладкий, рассуждение Ньютона к нему применимо. Оно показывает, что площадь, заметенная радиус-вектором, не выражается в целом единой алгебраической функцией. И действительно, каждый раз, когда $x(t)$, $y(t)$ проходит через особую (угловую) точку овала, алгебраическая функция, выражающая заметенную площадь, скачком заменяется на *новую* алгебраическую функцию.

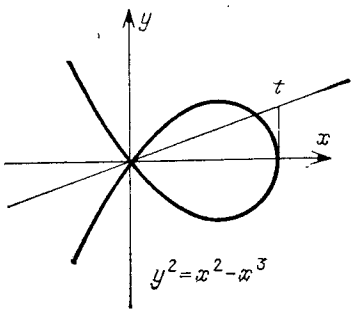

Рис. 30. Локально алгебраически квадрируемый овал с одной особой (угловой) точкой

Предыдущий пример показывает, что функция может быть *локально* алгебраической, не будучи алгебраической в целом (рис. 31). В этом смысле наш овал рис. 30 можно назвать локально алгебраически квадрируемым.

Практически, локальная алгебраическая квадрируемость почти столь же полезна, как и настоящая, глобальная. Поэтому у Ньютона естественно возник вопрос: *может ли гладкий алгебраический овал быть локально алгебраически квадрируемым*? То есть может ли площадь S сегмента, отсекаемого прямой $ax + by = c$, быть алгебраической функцией от (a, b, c) в окрестности каждой точки?

Чтобы построить (методом рис. 30) локально алгебраически квадрируемый овал, всюду имеющий касательную, достаточно подобрать подходящую пару многочленов. Например, многочлены $x = (t^2 - 1)^2$, $y = t^3 - t$ задают овал рис. 32, имеющий даже непрерывную кривизну (почему?). Таким образом, мы получили совершенно гладкий на вид овал, который локально алгебраически квад-

рируем (глобальная алгебраическая квадрируемость и здесь исключается рассуждением Ньютона).

З а д а ч а. Построить (локально) алгебраически квадрируемый овал с одной особой точкой, являющийся

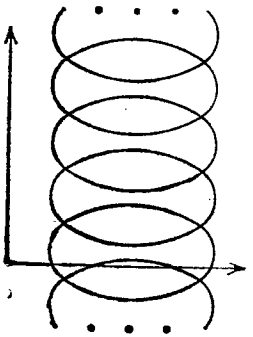

Рис. 31. График локально алгебраической, но не алгебраической функции

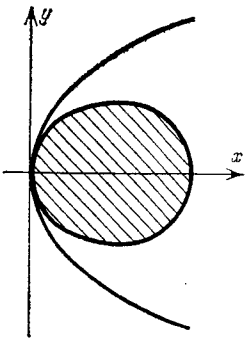

Рис. 32. Локально алгебраически квадрируемый овал с непрерывной кривизной

в окрестности особой точки графиком функции, имеющей 1989 непрерывных производных (а в окрестностях остальных точек — графиком неограниченное число раз дифференцируемой функции).

§ 27. Теорема Ньютона о локальной неалгебраичности

Итак, локально алгебраически квадрируемый овал может иметь сколь угодно большую конечную гладкость (может всюду задаваться функциями со сколь угодно большим числом производных). Однако во всех наших примерах на овале есть особая точка, где производная некоторого порядка разрывна.

Ньютон считал истинно гладкой кривой лишь такую, которая в окрестности каждой точки является графиком функции, разлагающейся в сходящийся степенной ряд

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

(где начало координат выбрано в рассматриваемой точке). Сейчас такие кривые называются *аналитическими*.

З а м е ч а н и е. Различие в поведении кривых различной конечной гладкости было Ньютону хорошо известно и обсуждается в Principia, а разложение всех алгебраических и элементарных функций в быстро сходящиеся степенные ряды было одним из основных его математических достижений.

Из теоремы § 25 Ньютон выводит гораздо более сильное утверждение.

Теорема. *Любой аналитический овал алгебраически не квадрируем даже и локально.*

Доказательство локальной алгебраической неквадрируемости аналитических овалов.

Если бы овал был локально, но не глобально алгебраически квадрируем, то заметенная площадь выражалась бы одной алгебраической функцией по одну сторону от некоторой его точки и другой — по другую. Но для аналитического овала заметенная площадь аналитически зависит от направления луча. Поэтому обе указанные алгебраические функции разлагаются в окрестности этой точки аналитического овала в один и тот же сходящийся степенной ряд. Значит, обе эти алгебраические функции совпадают и в окрестности указанной точки. Но тогда они совпадают вообще всюду (это следует из того, что многочлен, не равный тождественно нулю, не может иметь больше корней, чем его степень).

Итак, если бы существовал локально алгебраически квадрируемый аналитический овал, то он был бы алгебраически квадрируем и в целом. А поскольку это невозможно (§ 25), то аналитический овал не может быть алгебраически квадрируем даже и локально.

§ 28. Аналитичность гладких алгебраических кривых

Кривая называется бесконечно гладкой, если она локально является графиком функции, дифференцируемой сколько угодно раз.

Теорема. *Бесконечно гладкая алгебраическая кривая аналитична.*

Этот факт был Ньютону известен, так как Ньютон умел записывать уравнение любой «ветви» алгебраической кривой в окрестности любой ее точки в виде быстро сходящегося ряда

$$y = a_1 x^{1/n} + a_2 x^{2/n} + a_3 x^{3/n} + \ldots$$

(где начало координат помещено в исследуемую точку).

[Теорему о сходимости этого ряда Ньютон формулировал так: «Чем дальше развертывается при достаточно малом x результат, тем более он подходит к истинному значению y, так что разность, на которую он отличается от точного значения y, делается, наконец, меньше всякой данной величины» (43).

Ряд строится при помощи многоугольника Ньютона; см. § 8.]

Каждый член ряда с нецелым показателем имеет лишь ограниченное число производных. Если в ряду присутствует хотя бы один такой член нецелой степени, то определенная рядом кривая уже не может быть бесконечно гладкой в окрестности изучаемой точки.

Для бесконечно гладкой алгебраической кривой в разложении участвуют поэтому только целые степени, а это и значит, что кривая аналитична.

Следствие. *Всякий бесконечно гладкий алгебраический овал алгебраически неквадрируем даже локально.*

Итак, бесконечно гладкая замкнутая выпуклая кривая не может быть даже локально алгебраически квадрируемой, если она алгебраична. Может быть, локально алгебраически квадрируемые кривые следует искать среди неалгебраических овалов?

§ 29. Алгебраичность локально алгебраически квадрируемых овалов

Гладкий неалгебраический овал алгебраически неквадрируем. Это следует из доказанного выше, ибо справедлива

Теорема. *Всякий локально алгебраически квадрируемый овал алгебраичен.*

Этот факт Ньютон использует как очевидный. Видимо, он рассуждал так:

Лемма. *Огибающая любого алгебраического семейства прямых алгебраична.*

Иными словами, если множество касательных к кривой удовлетворяет алгебраическому уравнению, то сама кривая алгебраична.

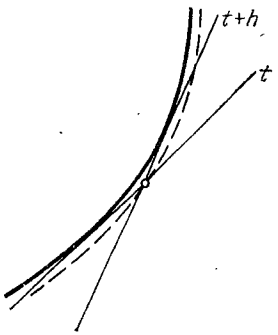

Рис. 33. Огибающая алгебраического семейства прямых алгебраична

Доказательство леммы. Рассмотрим две близкие касательные с тангенсами угла наклона к оси x, равными t и $t+h$ (рис. 33). Их точка пересечения пробегает при переменном t и фиксированном h алгебраическую кривую (изображенную на рис. 33 штриховой линией). Степень этой кривой (т. е. степень многочлена,

ее задающего) ограничена не зависящей от h постоянной. (Это следует из того, что условие совместности двух алгебраических уравнений выражается равенством нулю многочлена от их коэффициентов — факт, обсуждающийся Ньютоном все на тех же двух страницах Principia, где заодно объясняется, что две алгебраические кривые степеней m и n пересекаются не более чем в mn точках.)

При стремлении h к нулю точка пересечения близких касательных стремится к исходной кривой. Будучи пределом алгебраических кривых ограниченной степени, исходная кривая также является алгебраической.

Доказательство теоремы. Касательные к овалу отсекают от него сегменты нулевой площади. Поэтому касательные $ax + by = c$ к алгебраически локально квадрируемому овалу удовлетворяют алгебраическому уравнению $P(0; a, b, c) = 0$ (см. § 25). По лемме овал алгебраичен, что и доказывает теорему.

§ 30. Алгебраически неквадрируемые кривые с особенностями

Таким образом, все бесконечно гладкие овалы алгебраически неквадрируемы (даже локально). Более того, рассуждения Ньютона доказывают локальную алгебраическую неквадрируемость бесконечно гладких невыпуклых замкнутых несамопересекающихся кривых и даже многих кривых с особенностями.

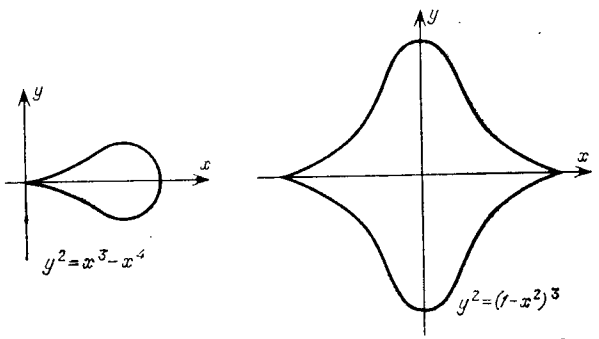

Рис. 34. Локально алгебраически неквадрируемые кривые с точками возврата

Локально алгебраически неквадрируемы все кривые, все особые точки которых являются точками возврата,

в частности кривые, заданные уравнениями $y^2 = x^3 - x^4$ или $y^2 = (1 - x^2)^3$ (рис. 34), или кривые с особенностями типа $y = x^{p/q}$, где q нечетно, и т. п.

Ньютон замечает, что для того, чтобы гарантировать локальную алгебраическую неквадрируемость, достаточно потребовать, чтобы к точкам замкнутой кривой не подходили «сопряженные ветви кривой, уходящей на бесконечность». Видимо, он имел в виду примеры вроде рис. 30 и 32, где такие «сопряженные ветви» есть.

В действительности, слова «уходящие на бесконечность» поставлены тут по ошибке, нужно обязательно потребовать отсутствия каких бы то ни было самопересечений. Достаточное условие отсутствия самопересечений на замкнутой кривой, удовлетворяющей уравнению $P(x, y) = 0$, состоит в том, что многочлен P обращается в нуль ровно в двух точках окружности с центром в любой точке кривой, если радиус окружности достаточно мал (более ученое условие отсутствия самопересечений таково: овал является взаимно однозначным образом одной из вещественных компонент связности своей нормализации).

Методом Ньютона доказывается

Теорема. *Все несамопересекающиеся в указанном смысле алгебраические кривые алгебраически неквадрируемы (даже локально).*

Напротив, самопересекающая замкнутая кривая вполне может оказаться локально алгебраически квадрируемой (эту возможность Ньютон почему-то упустил, когда писал «уходящие на бесконечность»). Примером является лемниската (не Бернулли) $y^2 = x^2 - x^4$ (рис. 27):

$$\int y\,dx = \int x\sqrt{1 - x^2}\,dx = -(\sqrt{1 - x^2})^3/3$$

— алгебраическая функция.*)

Но и для самопересекающихся кривых алгебраическая квадрируемость — редкость.

Из рассуждений Ньютона видно, что суммарная площадь, ограниченная самопересекающейся замкнутой локально алгебраически квадрируемой кривой (с учетом

* Этот пример был указан Гюйгенсом в письме Лейбницу в 1691 г. См. также Brougham H., Routh E. J. Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia. — London, 1855. Лейбниц в ответном письме ставит вопрос о трансцендентности площадей сегментов, отсекаемых от алгебраической кривой, заданной уравнением с рациональными коэффициентами, прямыми с алгебраическими коэффициентами (например, числа π и логарифмов алгебраических чисел). Вопрос Лейбница содержит седьмую проблему Гильберта и, кажется, до сих пор не решен.

знаков), равна нулю. Например, лемниската алгебраически квадрируема лишь потому, что обе петли лемнискаты дают в суммарную площадь противоположные вклады. И если продеформировать лемнискату так, чтобы модули площадей петель стали неравными, то она утратит локальную алгебраическую квадрируемость.

§ 31. Доказательство Ньютона и современная математика

Теорема Ньютона переносится на гиперповерхности в четномерном пространстве (В. А. Васильев, 1988). В нечетномерном пространстве дело обстоит сложнее. Например, в трехмерном случае объем сферического сегмента алгебраически зависит от отсекающей его плоскости (теорема Архимеда). Отличные от эллипсоидов алгебраически квадрируемые тела мне неизвестны, но, как показал В. А. Васильев, если они и существуют, то только очень специального вида. Очевидные связи этого вопроса с теорией особенностей, интегральной геометрией и томографией, вероятно, позволяют его решить.

Сегодня идеи, на которых основано доказательство Ньютона, называются идеями аналитического продолжения и монодромии. Они лежат в основе теории римановых поверхностей и ряда отделов современной топологии, алгебраической геометрии и теории дифференциальных уравнений, связанных прежде всего с именем Пуанкаре, — тех отделов, где анализ скорее сливается с геометрией, чем с алгеброй.

Забытое (44) доказательство Ньютона алгебраической неквадрируемости овалов было первым «доказательством невозможности» в математике нового времени — прообразом будущих доказательств неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах (Абель) и неразрешимости дифференциальных уравнений в элементарных функциях или в квадратурах (Лиувилль), и Ньютон недаром сравнивал его с доказательством иррациональности корней квадратных в «Началах» Евклида.

Сравнивая сегодня тексты Ньютона с комментариями его последователей, поражаешься, насколько оригинальное изложение Ньютона современнее, понятнее и идейно богаче, чем принадлежащий комментаторам перевод его геометрических идей на формальный язык исчисления Лейбница.

Добавление 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОРБИТ

Доказательство основано на следующих двух теоремах.

Рассмотрим эллипс с центром в точке 0 на плоскости комплексных чисел.

Теорема 1. *При возведении чисел в квадрат такой эллипс переходит в эллипс с фокусом в точке* 0.

Для доказательства удобно воспользоваться *эллипсами Жуковского*, определяемыми следующей конструкцией (рис. 35).

Лемма 1. *Когда точка* z *пробегает окружность* $|z| = r > 1$, *точка* $w = z + \frac{1}{z}$ *пробегает эллипс с центром* 0.

Доказательство леммы 1. Пусть $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$. Тогда $w = a\cos\varphi + ib\sin\varphi$, где

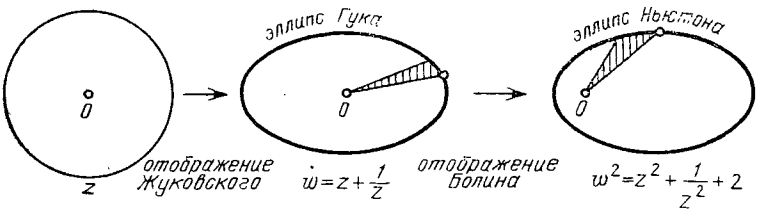

Рис. 35. Эллипсы Гука и Ньютона

$a = r + r^{-1}$, $b = r - r^{-1}$, что и требовалось: полуоси эллипса Жуковского равны a и b.

Лемма 2. *Фокусы эллипса Жуковского лежат в точках* ± 2.

Доказательство леммы 2.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4.$$

Лемма 3. *При возведении в квадрат эллипс Жуковского переходит в эллипс Жуковского, сдвинутый на* 2.

Доказательство леммы 3.

$$w^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2.$$

Доказательство теоремы 1. Квадрат эллипса Жуковского имеет 0 фокусом, так как при сдвиге на 2 фокус—2 переходит в 0. Любой эллипс с центром в точке 0 получается из подходящего эллипса Жуковского растяжением и поворотом. Значит, и его квадрат имеет 0 фокусом.

Следствие 1. *Всякий эллипс с фокусом* 0 *является квадратом* (*единственного*) *эллипса с центром* 0.

Доказательство следствия 1. Среди эллипсов Жуковского встречаются эллипсы с любыми отношениями полуосей.

Основной элемент доказательства эллиптичности орбит в поле тяготения — сведение движения по закону тяготения к движению по закону Гука при помощи возведения последнего движения в квадрат — заключен в следующей теореме Болина (45).

Теорема 2. *Пусть точка* w *плоскости комплексных чисел движется по закону Гука* $\ddot{w} = -w$. *Возведем* w *в квадрат и введем на траектории точки* $Z = w^2$ *новое время* τ *так, чтобы выполнялся закон площадей. Тогда* $Z(\tau)$ *удовлетворяет уравнению закона тяготения*

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -\frac{cZ}{|Z|^3}.$$

Доказательство. Из закона площадей $\frac{|w|^2 d\varphi}{dt} = \text{const}$, $\frac{2|Z|^2 d\varphi}{d\tau} = \text{const}$. Выбираем $\frac{d\tau}{dt} = \frac{|Z|^2}{|w|^2}$. Тогда $\frac{d}{d\tau} = \frac{w^{-1}\bar{w}^{-1} d}{dt}$, поэтому $\frac{d^2Z}{d\tau^2} = \frac{1}{w\bar{w}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{w\bar{w}} \frac{dw^2}{dt}\right) =$

$$= \frac{2}{w\bar{w}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\bar{w}} \frac{dw}{dt}\right) = -\frac{2}{w\bar{w}}\left(\frac{1}{\bar{w}^2} \frac{dw}{dt} \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{w}{\bar{w}}\right) =$$

$$= -2w^{-1}\bar{w}^{-3}(|\dot{w}|^2 + |w|^2) = -4Ew^{-1}\bar{w}^{-3}$$

($|\dot{w}|^2 + |w|^2 = 2E$ вдоль траектории по закону сохранения энергии). Теорема доказана; $c = 4E$.

Эллиптичность движений с отрицательной полной энергией в поле притягивающего по обычному закону тяготения центра вытекает из теорем 1, 2 и следствия 1. Действительно, теорема 2 показывает, что квадраты гуковских эллипсов являются орбитами движения в поле тяготения, а теорема 1 — что эти квадраты сами являются эллипсами

с фокусами в притягивающем центре, наконец, из следствия 1 видно, что эти квадраты подходящих гуковских эллипсов достают решения уравнения закона тяготения с любыми наперед заданными начальными условиями, для которых полная энергия в начальный момент отрицательна. Поскольку предъявленные решения гладко зависят от начальных условий, других решений с такими начальными условиями нет.

Замечание. Несколько таинственная выкладка в доказательстве теоремы Болина становится, быть может, понятнее, если слегка обобщить результат.

Теорема 3. *Траектории движения точки w по плоскости комплексных чисел в центральном поле притяжения, сила которого пропорциональна расстоянию до центра в степени a, переходят при преобразовании $Z = w^\alpha$ в траектории движения в центральном поле, сила которого пропорциональна расстоянию до центра в степени A, если* $(a+3)(A+3)=4$, $\alpha=\frac{a+3}{2}$.

Таким образом, для каждого степенного закона притяжения имеется единственный двойственный закон

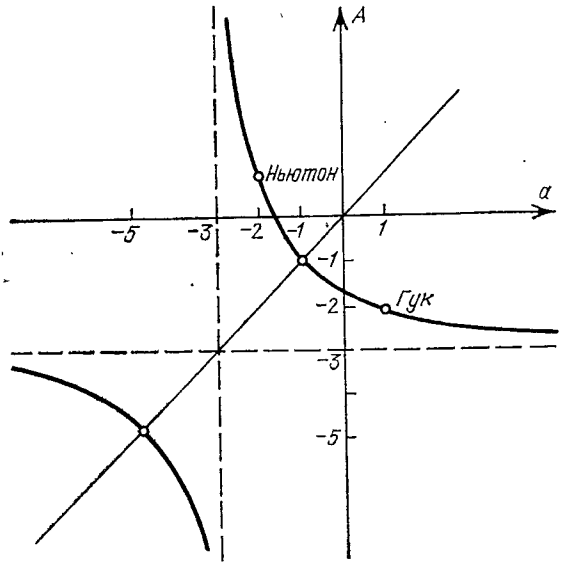

Рис. 36. Двойственные законы притяжения

(рис. 36). Например, закону Гука ($a = 1$) двойствен закон тяготения ($A = -2$) и обратно. Формулу, связывающую двойственные законы, можно извлечь из приведенного Ньютоном выражения для угла между перицентрами поч-

ти круговой орбиты (46). Самодвойственные законы отвечают $a = -1$ и $a = -5$. Эти случаи также особо выделены в Principia.

Доказательство теоремы 3 повторяет выкладку доказательства теоремы 2:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -w|w|^{a-1}, \quad \frac{d\tau}{dt} = |w|^{a+1},$$

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -CZ|Z|^{A-1}, \quad C = 2E\alpha(\alpha - 1),$$

$$2E = |\dot{w}|^2 + \frac{2|w|^{a+1}}{a+1}.$$

Следствие 2. *Траектории движения в центральном поле притяжения, сила которого обратно пропорциональна пятой степени расстояния до центра, поворачиваются при подходящей инверсии.*

Движение в поле, сила которого обратно пропорциональна пятой степени расстояния, рассмотрено уже в Principia: Ньютон доказал, что среди траекторий имеются окружности, проходящие через центр притяжения (47).

Следствие 3. *Все траектории движения в обычном поле тяготения после извлечения квадратного корня превращаются в траектории движения в линейном центральном поле $Z'' = -CZ$ на плоскости комплексных чисел.*

Теорема 4. *Все траектории движения в обычном поле тяготения — конические сечения с фокусом в притягивающем центре.*

Доказательство теоремы 4. Следствие 3 получается из теоремы 3 при $a = -2$, $\alpha = 1/2$. Поэтому знаки E и $C = 2E\alpha(\alpha - 1)$ противоположны. Траектории движения в линейном поле — центрально-симметричные эллипсы при $C > 0$, гиперболы при $C < 0$, прямые при $C = 0$. Возведя эллипсы в квадрат, получим кеплеровы эллипсы (по теореме 1).

Гипербола с центром в 0 при возведении в квадрат превращается в половину гиперболы с фокусом в 0. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть гиперболы Жуковского: $w = z + \frac{1}{z}$ пробегает такую гиперболу, когда z пробегает прямую, проходящую через 0. Гиперболы Жуковского конфокальны эллипсам Жуковского. При возведении w в квадрат фокус -2 сдвигается в начало координат (как для эллипсов).

Кроме того, исчезает вторая ветвь, так как z^2 пробегает уже не прямую, а только луч.

Случай $C = 0$ можно получить предельным переходом. Впрочем, он проще рассмотренных: прямая $\{t + i\}$ при возведении в квадрат превращается в параболу $\{t^2 - 1 + 2it\}$. Ее фокус — точка 0, директриса — прямая $\{is - 2\}$. Ибо

$$(t^2 - 1)^2 + 4t^2 = (t^2 + 1)^2.$$

Теорема 5. *При движении в любом поле притяжения, сила которого пропорциональна α-й степени расстояния до центра, некоторые траектории являются образами прямых при преобразовании*

$$w = Z^\beta, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{a+3}.$$

Пример. В поле закона всемирного тяготения это параболические траектории, $\beta = 2$. В поле, сила которого обратно пропорциональна пятой степени расстояния до центра — окружности, проходящие через центр, $\beta = -1$.

Доказательство. Если в выкладке доказательства теоремы 3 положить $E = 0$, то $\frac{d^2Z}{dt^2} = 0$, т. е. траектории Z — прямые.

Добавление 2. ЛЕММА XXVIII ИЗ PRINCIPIA НЬЮТОНА

«Не существует такой замкнутой овальной кривой, для которой площадь, отсекаемая произвольно проводимыми прямыми, определялась бы в общем виде уравнениями с конечным числом членов и конечной степени.

Пусть внутри овала взята какая-нибудь точка, около которой, как около полюса, равномерно вращается прямая линия, и одновременно из полюса выходит точка и движется по этой прямой со скоростью, пропорциональной квадрату длины отрезка этой прямой, заключенного внутри овала, между полюсом и периметром. При таком движении точка описывает спираль из бесчисленного множества оборотов. Если бы часть площади овала, отсекаемая сказанной прямой, могла бы быть найдена при помощи алгебраического уравнения с конечным числом членов, то при помощи того же уравнения нашлось бы и расстояние точки спирали до полюса, которое этой площади пропорционально; следовательно, все точки спи-

рали могли бы быть найдены при помощи конечного алгебраического уравнения, поэтому и точки пересечения с какой угодно заданной по положению прямой определялись бы при помощи алгебраического уравнения конечной степени. Но всякая неопределенно продолженная прямая пересекает спираль в бесконечном числе точек, уравнение же, с помощью которого находятся точки пересечения двух линий, доставляет их всеми своими корнями и в том же числе, следовательно, степень уравнения должна быть такою же, каково число точек пересечения.

Так, например, два круга пересекаются в двух точках, и каждая из них находится не иначе, как при помощи уравнения второй степени, которым определяется вместе с нею и вторая точка пересечения. Два конических сечения могут пересекаться в четырех точках, и эти точки, вообще, нельзя найти иначе, как при помощи уравнения четвертой степени, которым они все определяются совместно. Это происходит потому, что если бы искать каждое из этих пересечений в отдельности, то так как для них для всех условия одни и те же, то и вычисление для каждого пересечения будет то же самое, поэтому и получится одно и то же окончательное уравнение, которое должно доставлять все пересечения совместно, полно и безразлично. Таким образом, пересечения конического сечения и кривой третьего порядка, так как их может быть шесть, доставляются совместно уравнением шестой степени; пересечения двух кривых третьего порядка, которых может быть девять, доставляются уравнением девятой степени. Если бы это могло быть иначе, то все задачи, приводящие к уравнениям третьей степени, можно было бы сводить на задачи плоские, т. е. решаемые при помощи уравнений первой и второй степени. Все же задачи высших степеней — к задачам третьей степени (48). Здесь я говорю о кривых неприводимых, ибо если уравнение, определяющее кривую, может быть приведено к уравнению низшей степени, то эта кривая не простая, а составленная из двух или нескольких, которых пересечения и могут быть находимы в отдельности для каждой. Таким образом, пересечения двух прямых и конического сечения доставляются всегда уравнениями второй степени, трех прямых и неприводимой кривой третьего порядка — уравнениями третьей степени, четырех прямых и неприводимой кривой четвертого порядка — уравнениями четвертой степени и т. д. до бесконечности.

Следовательно, бесчисленное множество точек пересечения прямой и спирали, так как эта кривая простая и неприводимая, потребуют для своего определения уравнения с бесконечным числом корней и бесконечно большой степени, которое могло бы доставить все пересечения совместно, ибо для всех них один и тот же закон и одно и то же вычисление. Если из полюса опустить на сказанную секущую перпендикуляр и вращать его вместе с секущей около полюса, то пересечения спирали будут переходить одно в другое; то, которое было первым или ближайшим к основанию перпендикуляра, через один оборот станет вторым, после двух оборотов — третьим и т. д., между тем самое уравнение не иначе может измениться, как только от изменения величины тех количеств, которыми определяется положение самой секущей. А так как после каждого полного оборота эти количества принимают свои прежние значения, то и уравнение вновь принимает свой первоначальный вид и, следовательно, будучи единственным и оставаясь неизменным, должно доставить все точки пересечения в бесконечном числе, следовательно, оно должно иметь бесчисленное число корней. Итак, нельзя определить, вообще, пересечения прямой и спирали при помощи конечного уравнения, поэтому и не существует замкнутого овала, коего площадь, отсекаемая произвольно взятою прямой, могла бы выражаться в общем виде при помощи таких уравнений.

Подобным же образом, взяв за расстояние между полюсом и подвижною точкою, описывающей спираль, длину, пропорциональную отсекаемой части периметра овала, можно доказать, что длина периметра не может быть найдена вообще при помощи уравнений конечной степени. Под замкнутым овалом я разумею здесь такие кривые, которые не касаются сопряженных с ними кривых, уходящих в бесконечность.

Следствие. Таким образом, для эллипса площадь, описываемая радиусом, проводимым из фокуса к движущемуся телу, не может быть получена по данному времени при помощи конечного алгебраического уравнения, и поэтому не может быть определена пересечением эллипса с геометрически рациональной (алгебраической) кривой. Я называю геометрически рациональными (алгебраическими) кривыми такие, все точки которых определяются при помощи длин, определяемых в свою очередь алгебраическими уравнениями, т. е. при помощи сложных и составных отношений между длинами. Прочие же кривые

(как спирали, квадратрисы, трохоиды) я называю геометрически иррациональными (трансцендентными), подобно тому как длины называются арифметически рациональными, если они относятся друг к другу, как целое число к целому, если же такого отношения не существует — то арифметически иррациональными, как о том сказано в книге X «Элементов».

Отсечение же от эллипса площади, пропорциональной времени, при помощи геометрически иррациональной кривой исполняется следующим образом ...»

Фраза об отсутствии уходящих на бесконечность ветвей вставлена Ньютоном лишь во втором издании, в 1714 году. По-видимому, Ньютону не были известны замечания Лейбница и Гюйгенса, критиковавших текст 1687 года.

«Я не считаю возможным приписать Ньютону его предложение, так как он никак не использует природу того, что он называет овалом, а только то, что это замкнутая кривая, замыкающаяся после одного оборота, что не исключает даже случаи квадрата или треугольника» — писал Гюйгенс Лейбницу в 1691 году (49).

«Ньютон, для защиты невозможности квадратуры овалов, должен бы был ответить, что такой овал [образованный дугами двух парабол] не настоящий и не составлен одной обегающей его кривой, как того требует, по-видимому, его рассуждение, ибо одна из парабол при продолжении не пойдет по другой. Но Ваша кривая в форме восьмерки действительно обегаема, и его рассуждение применимо к ней, хотя она и не совсем имеет форму овала; итак, по его рассуждению она не должна бы быть квадрируемой общим образом [иметь алгебраические площади сегментов]. Было бы полезно рассмотреть само его рассуждение, чтобы понять, чего же в нем не хватает. Что касается круга или эллипса, то невозможность их общего квадрирования доказана в достаточной мере, но я еще не видел никакого доказательства неквадрируемости целого круга или какой-либо определенной его части» — писал Лейбниц Гюйгенсу 10/20 апреля 1691 года (49).

Кривая в форме восьмерки — лемниската «не Бернулли» $y^2 = x^2 - x^4$, обсуждавшаяся Гюйгенсом в предыдущих письмах. Таким образом, ошибка как исходного, так и исправленного текста Ньютона была замечена Гюйгенсом еще до того, как Ньютон внес исправления.

Фразы о неприводимости кривых также вставлены лишь во второе издание. Непонятно, зачем Ньютону потребовалось пересекать кривую третьей степени с тремя прямыми, четвертой — с четырьмя и т. д. До внесения упоминания о неприводимости это место допускало иное толкование: пересечение (прямой) с кривой третьей степени, как и с тремя прямыми, отыскивается с помощью кубического уравнения, с кривой четвертой степени, как и с четырьмя прямыми, — с помощью уравнения четвертой степени и т. д.

В таком случае это место может рассматриваться как план очень простого топологического доказательства теоремы Безу: при подсчете числа точек пересечения двух кривых можно кривую заменить прямыми, число которых равно степени кривой (поскольку для кривых данных степеней общего положения число комплексных точек пересечения не зависит от специального выбора кривых, его достаточно посчитать для кривых, близких к полностью распавшимся на прямые; для них же число точек пересечения такое же, как для полностью распавшихся кривых, т. е. равно произведению степеней).

Ньютон по поводу доказательства теоремы Безу ссылается на то, что иначе кубические иррациональности сводились бы к квадратичным и т. д. — можно также сказать, что он ссылается на неразрешимость проблемы резольвент или тринадцатой проблемы Гильберта для алгебраических функций (в отличие от теоремы Безу, эти утверждения в общем случае не доказаны и сегодня). Впрочем, нужная Ньютону часть теоремы Безу очевидна.

Непонятно, для чего Ньютон опускает перпендикуляр на подвижную прямую: для доказательства достаточно ограничиться прямыми, проходящими через центральную точку, и от нее и начинать отсчет. По-видимому, Ньютон для чего-то хотел рассматривать площадь как функцию прямой, определенную для всех прямых (вопреки мнению, что он избегал функций многих переменных, здесь сразу вводится, в духе преобразования Радона, интегральной геометрии или томографии, функция на многообразии прямых).

Связь между трансцендентностью фукций и трансцендентностью чисел, на которую намекает Лейбниц в в конце цитированного письма Гюйгенсу, глубже, чем кажется на первый взгляд (см. 7-ю проблему Гильберта).

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Bennequin D. Caustique mistique // Seminaire Bourbaki.— Novembre 1984.— № 637.— P. 1—37.

(2) Злой Вольтер писал, что Ньютон обязан своей карьерой «не исчислению бесконечно-малых и гравитации, а красоте своей племянницы».

Любимая племянница Ньютона, в семье которой он провел последние двенадцать лет своей жизни, К. Бартон славилась не только красотой, но и умом. Биографы Ньютона сообщают, что она долгое время была домоправительницей ученика Ньютона, графа Монтегю Галифакса, поэта и крупнейшего государственного деятеля, члена регентского совета Англии, первого лорда казначейства и основателя Английского банка. После его смерти в 1715 году К. Бартон унаследовала от него значительное состояние. Ньютон же обязан лорду Галифаксу должностью смотрителя монетного двора. См. More T. L. Isaac Newton. A Biography.— New York, London.: Charles Scribners sons, 1934,— 676 p.

(3) Закон этот называют также законом Бойля. Бойль, действительно, первым опубликовал его в 1660 году в своей книге, но со ссылкой на Гука, как на автора закона, не претендуя даже на соавторство.

(4) Однако уже в 1781 году Лагранж писал Даламберу о современной ему математике: «...я думаю также, что шахта становится слишком глубока и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы. Физика и химия представляют ныне сокровища гораздо более блестящие и легко эксплуатируемые, таким образом, по-видимому, все всецело обратились в эту сторону, и возможно, что места по геометрии в академии наук сделаются когда-нибудь тем, чем являются в настоящее время кафедры арабского языка в университетах.»

(5) Впоследствии, в 1694 году, Ньютон писал, что он открыл закон всемирного тяготения уже в 1665 или в 1666 году. Еще позже, в 1714 году, Ньютон датирует свой вывод эллиптичности орбит из закона обратных квадратов «1676 или 1677 годом». Однако ни в переписке 1679 года с Гуком, ни раньше, Ньютон о своих открытиях

в этой области не упоминал: он их не публиковал и никому о них не рассказывал. Ньютон объясняет это тем, что из-за неверного значения радиуса Земли, принятого им, вычисленные ускорения камня и Луны недостаточно точно укладывались в закон обратных квадратов. Первая публикация Гука о силе тяготения как возможной причине эллиптичности орбит относится к 1666 году.

(6) Рассуждение Ньютона, как нетрудно видеть, дает отклонение $\omega\sqrt{2h^3/g}$ при падении с высоты h на экваторе (g — ускорение силы тяжести, ω — угловая скорость Земли). Расчет с учетом силы Кориолиса, дающий в полтора раза меньшее отклонение, приведен, например, на с. 90 учебника: Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1984.— 272с.

(7) Гюйгенс рассматривал системы сталкивающихся и расходящихся шаров, соединенных нитями или стержнями или катающихся в желобах, и доказывал, что центр тяжести системы никогда не подымется выше своего начального положения, если предоставить систему самой себе, отпустив шары без начальной скорости.

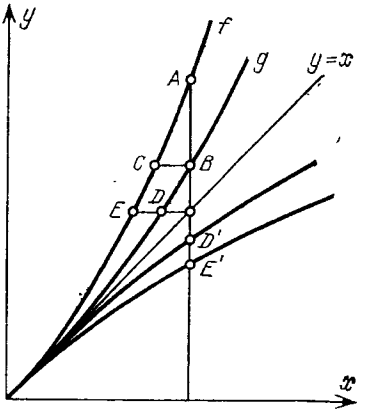

Рис. 37. Вычисление предела $|AB|\,/\,|D'E'|$.

(8) Если графики несовпадающих аналитических функций f и g касаются прямой $y = x$ в нуле (рис. 37), то отношения $AB\,|\,/\,|BC\,|$ и $|\,BC\,|/|\,ED\,|$ стремятся к единице, когда A стремится к нулю. Поэтому искомый предел отношения $|\,AB\,|\,/\,|\,D'E'\,|$ равен единице.

(9) См. п. 5 в § 7 гл. 6 на с. 481 в книге: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2.— М.: Гостехиздат, 1945.— 620 с. См. также: Арнольд В. И. О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц // УМН.— 1982.— Т. 37, вып. 4.— С. 125; Арнольд В. И. О ньютоновском потенциале гиперболических слоев // Труды Тбилисского университета.— 1982.— Т. 232—233.— С. 23—28; Гивенталь А. Б. Полиномиальность электростатических потенциалов // УМН.— 1984.— Т. 39, вып. 5.— С. 253—254; Арнольд В. И. Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори // УМН.— 1983.— Т. 38, вып. 5.— С. 145—146; Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З. Многомерные аналоги теорем Ньютона и Айвори / Функц. анализ и его приложения.— 1985.— Т. 19, вып. 1.— С. 20—24. Семейство конфокальных поверхностей второго порядка в n-мерном евклидовом

пространстве определяется как семейство поверхностей, двойственных к поверхностям евклидова пучка квадрик $(A - \lambda E x, x) = 1$ с параметром λ. При $n = 2$ конфокальные «поверхности» — это эллипсы и гиперболы с общими фокусами.

(10) Вейнсток Р. Разоблачение вековой легенды: «Математические начала натуральной философии» Ньютона и орбиты при движении в поле центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния // Физика за рубежом — 1984. Сер. Б.— М.: Мир, 1984.— С. 178—207 (Weinstock R. // Amer. J. of Physics.— July 1982.— P. 610).

(11) Например, уравнение $\dot{x} = x^{2/3}$ имеет решения $x = 0$ и $x = t^3/27$ с общим начальным условием $x(0) = 0$.

(12) С. 25 в «Методе флюксий» (Ньютон И. Математические работы.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 452 с.)

(13) Перед смертью Барроу сказал друзьям: «Наконец-то я узнаю решение многих геометрических и астрономических вопросов. О, Господи, какой Ты геометр!»

(14) Фоменко А. Т. Глобальная хронологическая карта // Химия и жизнь.— 1983.— Вып. 9.— С. 85—92.

(15) Свифт писал: «Мои враги распространяют слухи об И. Ньютоне, ремесленнике, изготавливающем инструменты... Говорят, что его слава затмит мою.»

(16) Исчисление бесконечно малых, F. C. 198 в книге: Бурбаки Н. Очерки по истории математики.— М.: ИЛ, 1963.— 292 с.

(17) Современным математикам вообще трудно читать своих предшественников, которые писали: «Петя вымыл руки» там, где просто следовало сказать: «Существует $t_1 < 0$, такое, что образ Петя (t_1) точки t_1 при естественном отображении $t \mapsto$ Петя (t) принадлежит множеству грязноруких и такое t_2 из полуинтервала $(t_1, 0]$, что образ точки t_2 при том же отображении принадлежит дополнению к множеству, о котором шла речь при рассмотрении точки t_1.»

(18) Oeuvres mathematiques de Leibniz. I partie, 2 volume. Paris, A. Franck, 1853, 344 pp., p. 255.

(19) Ньютон был не безбожником, а скорее, тайным арианцем — еретиком, отрицавшим догмат Троицы. По словам биографов, он считал, что, кроме Христа, у Бога могут быть другие сыновья, через которых он открывает людям свои истины и, кажется, родившись вдобавок 25 декабря, всерьез считал себя одним из таких пророков. Ньютону принадлежат толкования Апокалипсиса и пророчеств Даниила; в частности, он предсказывал падение папского престола к 2000 году.

(20) Боголюбов А. Н. Роберт Гук.— М.: Наука, 1984.— 240 с. В этой книге на с. 55 хладниевы фигуры, образованные скоп-

лением песка вблизи нулей собственной функции колеблющейся горизонтальной пластинки (и открытые Гуком более чем за сто лет до Хладни), названы фигурами Лиссажу (последние в трудах Гука, кажется, пока еще не обнаружены).

(21) Ляшко О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем // Функц. анализ и его приложения.— 1983.— Т. 17, вып. 3.— С. 20—36; Щербак О. П. Особенности семейства эвольвент и окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями // Функц. анализ и его приложения, 1983.— Т. 17, вып. 4.— С. 70—72; Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений, // УМН.— 1988.— Т. 43, вып. 3; Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения.— М.: 1986.— 94 с. (Деп. в ВИНИТИ от 5 июня 1986 г., № 4130 — В). Итоги науки.— 1988.— Т. 33.

(22) Степени инвариантов равны 2,6 и 10; инвариант степени 2 — это квадрат расстояния до начала координат, а инварианты степеней 6 и 10 получаются из 12 вершин и 20 граней икосаэдра (как произведения линейных функций, равных ± 1 в вершинах и в центрах граней).

(23) См., например: Schechtman D., Gratias D., Cahn J. W., Microscopic evidence for quasi-periodicity in a solid with long-range icosahedral order // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.— 1985.— Т. 300, Serie 11, № 18.— P. 909—914.

(24) Другой способ увидеть пятиугольную симметрию состоит в следующем. Рассмотрим «лестницу», состоящую из кубов объемлющего пространства с вершинами в точках целочисленной решетки, пересекающих изучаемое иррационально расположенное подпространство. Проекция границы лестницы на это подпространство определяет его разбиение на многогранники конечного числа типов, повторяющихся, однако, не периодически — так называемое разбиение Пенроуза. На рис. 38 изображено подобное разбиение плоскости с явными следами пятиугольной симметрии.

Между прочим, конструкция лестницы доставляет замощения плоскости разными ромбами, которые алгоритмически невычислимы (не могут быть построены никакой вычислительной машиной с конечной программой).

Действительно, лестница из кубов трехмерного пространства, пересекающих иррационально расположенную плоскость, — бесконечный многогранник с квадратными гранями трех направлений, образующими две ограничивающие многогранник сверху и снизу поверхности — крышки. Спроектируем верхнюю крышку на исходную иррационально расположенную плоскость вдоль диагонали куба. Три смежные грани куба спроектируются в три параллелограмма, аффинно эквивалентные трем ромбам одинаковой величины с общей вершиной угла в 120° (рис. 39).

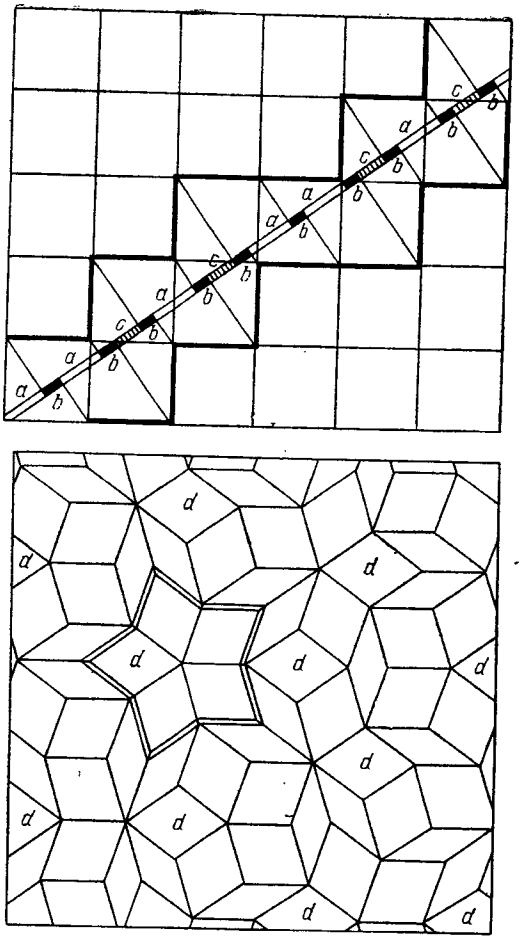

Рис. 38. Построение одномерного разбиения Пенроуза и двумерный квазикристалл

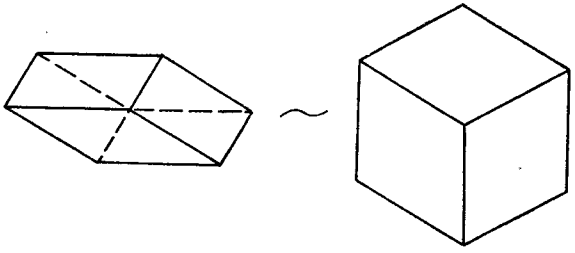

Рис. 39. К построению невычислимого разбиения Пенроуза

Все грани верхней крышки спроектируются в параллельно перенесенные параллелограммы, однократно заполняющие всю плоскость. Упомянутое аффинное преобразование превратит все эти параллелограммы в ромбы.

Направление исходной плоскости определяется полученным замощением. Но направлений континуум, а программ счетное множество. Значит, некоторые из полученных замощений (и даже почти все они) невычислимы.

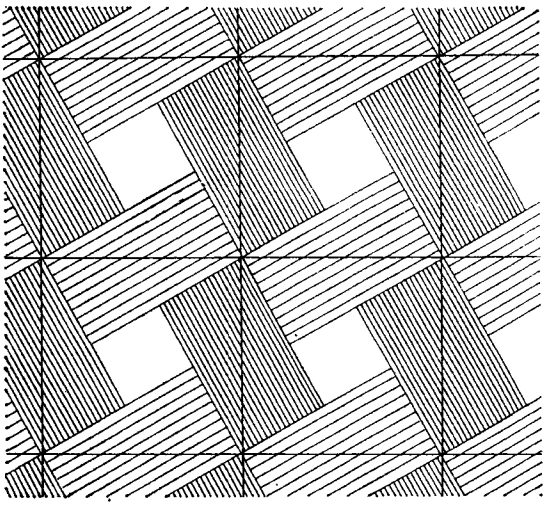

Рис. 40. Построение квазипериодического разбиения Пенроуза по марковскому разбиению тора

Описанные выше разбиения Пенроуза квазипериодичны. Квазипериодические разбиения Пенроуза получаются из разбиения тора на призмы с основаниями, параллельными иррациональному подпространству, на котором и высекается квазипериодическое разбиение. Такое разбиение двумерного тора изображено на рис. 40 (аналогичные разбиения встречаются в эргодической теории в качестве так называемых марковских разбиений, введенных Я. Г. Синаем).

Построенные выше (при помощи «лестниц») разбиения Пенроуза также высекаются из разбиений торов на призмы с параллельными основаниями. Так что конструкция с призмами может рассматриваться как обобщение конструкции с лестницей.

Квазипериодическое разбиение Пенроуза — это разбиение иррационального подпространства на множества уровня специальной квазипериодической функции с конечным числом значений. Эта функция получается при ограничении на иррациональное подпространство функции с конечным числом значений на торе, постоянной

на призмах с параллельными подпространству основаниями. Назовем такие квазипериодические функции функциями Пенроуза. Любую непрерывную функцию на торе любой размерности можно с любой точностью аппроксимировать функцией с конечным числом значений, постоянной на призмах с параллельными данному направлению (любой размерности) основаниями. Поэтому любую квазипериодическую функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать квазипериодической функцией Пенроуза такой же периодичности (высекаемой тем же иррациональным подпространством, что исходная функция).

Отсюда ясно, что узор, который мы видим, рассматривая квазипериодическую функцию (ее линии уровня, сеть особых точек и т. п.), всегда должен напоминать разбиение Пенроуза. При этом,

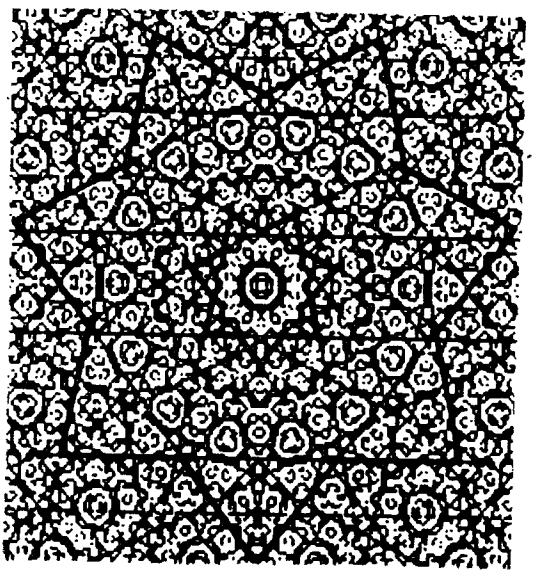

Рис. 41. Стохастическая паутина

если исходная функция имела какую-либо симметрию, то и аппроксимирующее разбиение Пенроуза (построенное по какому-либо естественному алгоритму) будет иметь ту же симметрию.

Таким образом, мы получаем еще один способ порождения квазикристаллических структур: достаточно начать с квазипериодической функции с нужной симметрией и переработать ее в разбиение каким-либо естественным алгоритмом.

Следующий пример этого рода обнаружен Г. М. Заславским, М. Ю. Захаровым, Р. З. Сагдеевым, Д. А. Усиковым и А. А. Черниковым (Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 2.— С. 500—516; Генерация

упорядоченных структур с осью симметрии из гамильтоновской динамики. // Письма в ЖЭТФ.— Т. 44, вып. 7.— С. 349—353) при анализе резонансного взаимодействия частиц с волной в плазме, помещенной во внешнее магнитное поле.

Рассмотрим преобразование плоскости в себя, заданное формулой $T = AB$, где A — поворот на угол $2\pi p/q$, а $B\ (x, y) = (x, y + \varepsilon \sin x)$. Вычислительный эксперимент показывает, что при подходящем выборе начальной точки образы этой точки при многократном повторении преобразования T заполняют сеть из тонких при малых ε линий — «стохастическую паутину» с симметрией порядка q, выглядящую издалека подобно разбиению Пенроуза (рис. 41, $q = 7$).

Объяснение состоит в следующем. При $\varepsilon = 0$ отображение T^q оставляет все точки плоскости на месте. Поэтому при малом ε каждая точка под действием отображения T^q сдвигается на малое расстояние порядка ε. С другой стороны, отображения A и B, а значит и T, сохраняют площади. Поэтому отображение T^q с точностью до малых порядка ε^2 представляет собой преобразование за время ε в фазовом потоке, заданном некоторой функцией Гамильтона H по обычной формуле

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Вычисления показывают, что функция Гамильтона $H\ (x, y)$ имеет вид

$$H = \cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_q,$$

где α_k — линейная функция на плоскости, равная скалярному произведению радиус-вектора точки (x, y) с радиус-вектором k-й вершины правильного q-угольника с центром в начале координат. Эта функция H квазипериодична и имеет симметрию порядка q. (H высекается из суммы косинусов, заданной на q-мерном торе, при вложении α двумерной плоскости в q-мерный тор в виде иррационального пространства неприводимого представления циклической группы порядка q.)

Функция Гамильтона H является первым интегралом системы уравнений Гамильтона. Поэтому при повторении отображения T^q точка плоскости будет оставаться на той же линии уровня функции H, где лежала начальная точка (по меньшей мере в первом приближении теории возмущений по ε).

Итак, наблюдаемая стохастическая паутина близка к линии уровня квазипериодической функции H, имеющей очевидную симметрию порядка q. Этим и объясняется сходство паутины с квазикристаллическим разбиением Пенроуза с симметрией порядка q.

Непосредственное изучение линий уровня функции H порождает такие же квазикристаллические структуры на плоскости,

что и повторение преобразования T, порождающего стохастическую паутину.

(25) Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей / Функц. анализ и его прилож.— 1984.— Т. 18, вып. 3.— С. 1—13.)

(26) Principia, Книга III (О системе мира), Общее поучение (с. 659 в издании: Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII, Ньютон И. Математические начала натуральной философии.— М.; Л.: АН СССР, 1936.— 696 с.)

(27) Principia, Книга II (О движении тел), Поучение (с. 428—430 цитированного издания. Ср. также с. 65—78: Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах.— М.: Наука, 1986.— 192 с.)

(28) См., например, гл. II книги IV (с. 143) в книге: Лаплас П. С. Изложение системы мира.— Л.: Наука, 1982.— 376.; Laplace P. S. Traité de mécanique celeste, I—V. Paris, 1799—1827.

(29) Лидов М. Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // Проблемы движения искусственных небесных тел.— М.: АН СССР, 1963.— С. 119—134.

(30) См. Приливы и резонансы в Солнечной системе.— М.: Мир, 1975.— 288 с.

(31) См., например, Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН.— 1983.— Т. 38, вып. 1.— С. 3—67.

(32) Nova Comm. Petropol. 11 (1767), 144—151; см. также: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.— 524 с.

(33) Lagrange, Oeuvres, 6, 272—292 (1772).

(34) Эльясберг П. Е., Тимохова Т. А. Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарного центра либрации в ограниченной эллиптической задаче трех тел.// Космические исследования.— 1986.— Т. 24,— вып. 4.— С. 497—512.

(35) Симоненко А. Н. Астероиды.—М.: Наука, 1985.—208 с.

(36) С. 216 в книге: Дариус Д. Недоступное глазу.— М.: Мир, 1986.— 248 с.

(37) Горькавый Н. Н., Фридман А. М. О резонансной природе колец Урана, определяемой его неоткрытыми спутниками // Письма в астрономический журнал.—1985.—Т. 11, № 9.— С. 717—720.

(38) Пуанкаре А. Избранные труды. Т. I—III.— М.: Наука, 1971—1974.

(39) Нейштадт А. И. Об изменении адиабатического ин-

варианта при переходе через сепаратрису / Физика плазмы.— 1986.— Т. 12, вып. 8.— С. 992—1001.

Tennyson J. L., Cary J. R., Escande D. F. Change of the adiabatic invariant due to separatrix crossing // Phys. Rev. Lett.— 1986.— V. 56, № 20.— P. 2117—2120.

Wisdom J. A perturbativ treatment of motion near the 3/1 commensurability // Icarus.— 1985.— V. 63, № 2.— P. 272—289.

(40) Вячеславов В. В., Чириков Б. В. Хаотическая динамика кометы Галлея / Препринт 86—184, ИЯФ, Новосибирск, 1986.— 30 с.

(41) Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1979.— вып. 5.— С. 5—50.

(42) Лемма XXVIII в Principia (с. 153—154 цитированного русского издания), с. 79—82 настоящей книги.

(43) С. 23 в статье «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (Ньютон М. Математические работы.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 452 с.)

(44) Неубедительная критика доказательства Ньютона дана М. Выгодским в примечании на с. 394 книги: Цейтен Г. Г., История математики в XVI и XVII веках.— М.: ГТТИ, 1933.— 432 с.

Тэрнбулл [Turnbull H. W., The Mathematical Discoveries of Newton.— London and Glasgow: Blackie and Son, 1945.— 68 p.] отмечает, что рассуждение Ньютона «несет явные черты идей, получивших полное развитие в теории групп как Галуа, так и Ли». Смысл этой фразы, на которую указал мне А. П. Юшкевич, не вполне ясен: при чем здесь группы Ли?

В книге Цейтена обсуждается также работа Грегори, доказавшего еще до Ньютона трансцендентность тригонометрических функций.

(45) Bohlin K. Bull. Astr. 28 (1911), 144.

(46) Principia, Предложение X, с. 191 цитированного русского издания.

(47) Principia, Предложение VII, с. 85, цитированного русского издания.

(48) Довод Ньютона непонятен, но «теорему Безу», по которой кривые степеней m и n пересекаются не более, чем в mn точках (либо по целой компоненте), он знал. Доказывать эту теорему он мог так. Если уравнения $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ ($\deg f = m$, $\deg g = n$) разрешимы относительно x при данном y, то система $fu + gv = 0$ $m + n$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных многочленов $u(x)$, $v(x)$ степеней $n - 1$ и $m - 1$ имеет ненулевое решение. Тогда обращается в нуль некоторый многочлен от коэффициентов системы, называемый результантом (как

мы сказали бы сейчас — определитель системы). Прямое вычисление показывает, что степень результанта по y равна mn (докажите!). Если результаит не тождественный нуль, то число его корней y не превосходит mn.

Итак, набор точек пересечения проектируется на ось y, а значит и на любую прямую, в не более чем mn точек, а значит и состоит из не более чем mn точек.

Впрочем, Ньютон использует ниже только очевидную конечность числа точек пересечения алгебраической кривой с прямой (и неприводимость спирали).

(49) Oeuvres mathématiques de Leibniz, I partie, 2 volume, Paris, A. Franck, 1853, 344 pp, pp. 90—93.

Учебное издание

АРНОЛЬД Владимир Игоревич

ГЮЙГЕНС И БАРРОУ, НЬЮТОН И ГУК
первые шаги математического анализа
и теории катастроф, от эвольвент
до квазикристаллов

Серия «Современная математика для студентов»
Выпуск 1

Заведующий редакцией *А. П. Баева*

Редактор *В. В. Абгарян*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Н. Б. Румянцева, И. Я. Кришталь*

ИБ № 32827

Сдано в набор 15.04.88. Подписано к печати 29.12.88.

Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага книжно-журнальная импортная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5.46. Уч.-изд. л. 5,19. Тираж 36 000 экз. Заказ № 1550. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

The book contains the point of view of a modern mathematician on the story of formation of the calculus and of the theoretical physics in the works of Barrow, Huygens, Hooke, Newton, Leibniz.

The author describes the relations of works of 1680-th and of 1980-th — from the first steps of the singularities theory of wave fronts (in the form of evolutes and involutes theory of Huygens) to the relations of the Coxeter reflections groups (including the icosahedron symmetries group) to the modern variational calculus on one side and to the quasicrystallic symmetry theory on the other.

He discusses the recent generalizations of the Newton theorems on the ellipticity of orbits, on the attraction by the spheres and on the transcendence of the abelian integrals (including some results of modern mathematicians, which are direct continuations of the Newton's results).

A short survey is given of the theory of regular and chaotic motion in celestial mechanics, including the gaps problem in asteroids distribution and the recent (1985) prediction of the Uranus satellites based on the resonant structure of its rings.

One of the appendices reproduces the Newton's topological proof of the transcendence of abelian integrals. The other one contains a proof of the ellipticity of orbits, based on the Zjukovski function of complex variable. This proof gives at the same time a new duality law, describing the relations between the motions in different central forces fields (the universal attraction law is dual to the Hooke law).

The comments contain among other things, 45 annotated references, some invectives against the modern mathematical scolastisc, the Voltaire's and Swift's insinuations against Newton, and the construction of the Penrose quasicrystallic tilings which are not constructibel by any computer.